

LA DINÁMICA LINEAL DE UNA N-UPLA DE
OPERADORES HIPERCÍCLICA COMO
GENERADORA DE LA BIHIPERCICLIDAD

THE LINEAR DYNAMIC OF A HYPERCYCLIC
TUPLE OF OPERATORS SUCH AS
BIHYPERCYCLICITY GENERATOR

NELYDA VARGAS–DUQUE*

*Received: 12/Feb/2015; Revised: 16/Mar/2016;
Accepted: 13/Apr/2016*

Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones is licensed under a Creative Commons
Reconocimiento-NoComercial-Compartirigual 4.0 International License.
Creado a partir de la obra en <http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/matematica>



*Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela. E-Mail: nelidav@ula.ve,
nelida2785@gmail.com

Resumen

En este artículo se estudia el estado del arte del trabajo reciente de Grosse-Erdmann & Kim [6], destacando como una n -upla de operadores hipercíclica es una fuente para construir funciones bilineales bihipercíclicas.

Palabras clave: órbita densa; n -upla de operadores hipercíclica; función bilineal bihipercíclica.

Abstract

In this paper we study the art of recent work Grosse-Erdmann & Kim [6], highlighting as a hypercyclic tuples of operators is a source to build bihypercyclic bilinear mappings.

Keywords: dense orbit; hypercyclic tuples of operators; bihypercyclic bilinear mapping.

Mathematics Subject Classification: 37C35, 46E20 , 47D03.

1 Introducción

Este trabajo es un tema de reciente investigación, en el cual se analiza la noción de órbita para funciones bilineales y se prueban algunos resultados de la bihiperciclicidad que son análogos con la hiperciclicidad, estos son: la bihiperciclicidad se preserva bajo la conjugación, el conjunto de los vectores bihipercíclicos no es denso, el Teorema de León y Muller es aplicable en la bihiperciclicidad con ciertas condiciones y se cumple la propiedad de cuasiconjugada. Asimismo, se desarrollan varios ejemplos de estas funciones en los espacios ℓ^1 y ℓ^2 ; destacando que una n -upla hipercíclica, constituye una de las fuentes para construir funciones bilineales bihipercíclicas. La teoría que fundamenta los estudios de hiperciclicidad, se pueden consultar en [2], [1], [10], [5], [12], [11] y [7]. En cuanto a la bihiperciclicidad ver [6].

2 Teoría y resultados

A lo largo del artículo, un espacio de Hilbert separable se denotará como X , el conjunto de operadores lineales acotados sobre X se denotará como $\mathcal{L}(X)$ y se asume que las funciones bilineales son continuas.

Definición 1. Una función $B : X \times X \rightarrow X$ es bilineal, si es lineal en la primera variable y lineal en la segunda variable, es decir, si para todo u, v, w en X y escalares α y β , se cumple

$$\begin{aligned} B(\alpha u + \beta v, w) &= \alpha B(u, w) + \beta B(v, w) \\ B(u, \alpha v + \beta w) &= \alpha B(u, v) + \beta B(u, w). \end{aligned}$$

Asimismo, una función bilineal es simétrica si $B(u, v) = B(v, u)$.

Definición 2. Sea $B : X \times X \rightarrow X$ una función bilineal, B es acotada si existe una constante $C > 0$, tal que, para todo $x, y \in X$,

$$\|B(x, y)\| \leq C\|x\|\|y\|.$$

Es importante mencionar, que si B es acotada es equivalente a decir que B es continua, como sucede en el caso lineal. Del mismo modo, se cumple, que las funciones bilineales en espacios de dimensión finita son continuas. Para abordar el comportamiento dinámico de las funciones bilineales, se estudian sus órbitas.

Definición 3. Sea $B : X \times X \rightarrow X$ una función bilineal, dado un par $(x, y) \in X \times X$, la órbita de (x, y) bajo B es el conjunto

$$\text{orb}((x, y), B) = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n,$$

donde

$$\begin{aligned} U_0 &= \{x, y\}, \\ U_1 &= \{x, y, B(x, x), B(x, y), B(y, x), B(y, y)\}, \\ U_2 &= \{x, y, B(x, x), B(x, y), B(y, x), B(y, y), B(x, B(x, x)), \\ &\quad B(x, B(x, y)), \dots, B(y, B(x, x)), B(y, B(x, y)), \dots, B(B(x, x), x), \\ &\quad B(B(x, x), y), B(B(x, x), B(x, x)), \dots\}, \end{aligned}$$

y en general para $n \geq 1$, $U_n = U_{n-1} \cup \{B(u, v) : u, v \in U_{n-1}\}$.

Otra forma alternativa de definir la órbita para funciones bilineales es la siguiente, dado un $(x, y) \in X \times X$, la órbita de (x, y) bajo B es el conjunto

$$\text{orb}((x, y), B) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [B]_n(x, y)$$

donde

$$\begin{aligned} [B]_0(x, y) &= \{x, y\}, \\ [B]_1(x, y) &= \{B(x, x), B(x, y), B(y, x), B(y, y)\}, \\ [B]_2(x, y) &= \{B(x, B(x, x)), B(x, B(y, y)), B(y, B(y, x)), \dots, \\ &\quad B(B(x, y), x), B(B(x, y), y), B(B(y, y), x), \dots\} \end{aligned}$$

y en general para $n \geq 1$, $[B]_n(x, y) = \{B(u, v) : \exists j \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que los elementos de $u \in [B]_j(x, y), v \in [B]_{n-1-j}(x, y)\}$, por lo tanto, $[B]_n(x, y)$ contiene todos los elementos de la órbita que son obtenidos exactamente por n aplicaciones. Esta definición de órbita es una propuesta introducida por primera vez en [6], los autores destacan que es una alternativa natural pero posiblemente no única. Dicha representación de órbita es la que será utilizada para las pruebas, ya que es más práctica en el uso del método de inducción.

Definición 4. Sea $B : X \times X \rightarrow X$ una función bilineal, se llama bihipercíclica si existe un par $(x, y) \in X \times X$, tal que $\text{orb}((x, y), B)$ es densa en X .

A tal par (x, y) se le denomina vector bihipercíclico para B y al conjunto de esos vectores bihipercíclicos se denotará como $BHC(B)$.

Un resultado en la hiperciclicidad es que el conjunto de los vectores hipercíclicos es siempre un conjunto G_δ denso cuando este no es vacío, ver [2]. Lo análogo no es cierto para bihiperciclicidad, ya que el conjunto de vectores bihipercíclicos es un conjunto G_δ pero este no es denso.

Teorema 1. El conjunto $BHC(B)$ es un conjunto G_δ en $X \times X$ que no es denso. Más precisamente, si $M > 0$ tal que para toda $x, y \in X$, $\|B(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ y $\|x\|, \|y\| \leq \frac{1}{M}$ entonces (x, y) no es un par bihipercíclico para B .

Demostración. Primero se demostrará que $BHC(B)$ se puede escribir como la intersección de una colección numerable de abiertos, es decir, que es un conjunto G_δ . Como X es separable existe una base numerable de abiertos $(V_k)_{k \geq 1}$ para la topología de X . Sea $(x', y') \in X \times X$ un par bihipercíclico, es decir,

$$\begin{aligned} (x', y') \in BHC(B) &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \text{orb}((x', y'), B) \cap V_k \neq \emptyset, \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} [B]_n(x', y') \right) \cap V_k \neq \emptyset, \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}_0 : [B]_n(x', y') \cap V_k \neq \emptyset, \\ &\Leftrightarrow (x', y') \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(x, y) : [B]_n(x, y) \cap V_k \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Luego por la continuidad de B , se tiene que $BHC(B)$ es la intersección de una colección numerable de abiertos, es decir,

$$BHC(B) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(x, y) : [B]_n(x, y) \cap V_k \neq \emptyset\},$$

y por lo tanto es un conjunto G_δ .

Ahora se demostrará que $BHC(B)$ no es denso. Sea $(x, y) \in X \times X$ con U definido como $\left\{B(x, y) : \|x\|, \|y\| \leq \frac{1}{M}\right\}$, se demostrará que U no contiene ningún vector bihipercíclico, es decir,

$$\text{para cualquier } z \in \text{orb}((x, y), B) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [B]_n(x, y) \text{ se cumple } \|z\| \leq \frac{1}{M}, \quad (1)$$

lo cual implica que (x, y) no es bihipercíclico para B y por lo tanto $BHC(B)$ no es denso. Para ver esto, se procede por inducción.

Para $n = 0$, se tiene que

$$z \in [B]_0(x, y) = \{x, y\}, \|z\| \leq \frac{1}{M}.$$

Suponga que (1) se cumple para toda $k < n$, así, si $z \in [B]_k(x, y)$ se tiene que $\|z\| \leq \frac{1}{M}$.

Luego para $k = n$, sea $z \in [B]_n(x, y)$, entonces hay $j \in \{0, \dots, n - 1\}$, tal que $u \in [B]_j(x, y), v \in [B]_{n-1-j}(x, y)$, así $z = B(u, v)$, y

$$\|z\| = \|B(u, v)\| \leq M\|u\|\|v\| \leq \frac{1}{M},$$

por lo tanto, para cualquier $z \in \text{orb}((x, y), B)$, se cumple que $\|z\| \leq \frac{1}{M}$, así (x, y) no es un vector bihipercíclico para B . ■

Otro resultado en la hiperciclicidad es el de León & Muller [9], el cual dice lo siguiente: si T es un operador hipercíclico entonces λT también es hipercíclico con $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$. Por otra parte, si $|\lambda| \neq 1$, en general, λT no es hipercíclico. Para bihiperciclicidad tiene un desarrollo distinto, como se expone en el siguiente Teorema.

Teorema 2. *Sea B una función bilineal continua bihipercíclica y $\lambda \neq 0$ un escalar. Entonces λB es también bihipercíclica. Por otra parte,*

$$BHC(\lambda B) = \left\{ \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda} \right) : (x, y) \in BHC(B) \right\}.$$

Demostración. Se demostrará que λB es bihipercíclica con $\lambda \neq 0$, de tal manera, debe existir un $(x', y') \in X \times X$ tal que

$$\text{orb}((x', y'), \lambda B)$$

es densa en X .

Sea $(x', y') = (\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda})$ con $(x, y) \in BHC(B)$, entonces se demostrará que

$$\text{orb}\left(\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right), \lambda B\right)$$

es densa en X .

Primero, se demuestra que para cualquier $n \geq 0$, $x, y \in X$ y $\lambda \neq 0$,

$$[\lambda B]_n\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}[B]_n(x, y). \quad (2)$$

Se procede por inducción, para $n = 0$, se tiene

$$[\lambda B]_0\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) = \left\{\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right\} = \frac{1}{\lambda}\{x, y\} = \frac{1}{\lambda}[B]_0(x, y).$$

Suponga que (2) se cumple para toda $k < n$. Entonces para $k = n$,

$$\begin{aligned} [\lambda B]_n\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) &= \\ &= \left\{\lambda B(u, v) : \exists j \in \{0, \dots, n-1\}, u \in [\lambda B]_j\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right), v \in [\lambda B]_{n-1-j}\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right)\right\} \\ &= \left\{\lambda B(u, v) : \exists j \in \{0, \dots, n-1\}, u \in \frac{1}{\lambda}[B]_j(x, y), v \in \frac{1}{\lambda}[B]_{n-1-j}(x, y)\right\} \\ &= \left\{\lambda B\left(\frac{u'}{\lambda}, \frac{v'}{\lambda}\right) : \exists j \in \{0, \dots, n-1\}, u' \in [B]_j(x, y), v' \in [B]_{n-1-j}(x, y)\right\} \\ &= \frac{1}{\lambda}\{B(u', v') : \exists j \in \{0, \dots, n-1\}, u' \in [B]_j(x, y), v' \in [B]_{n-1-j}(x, y)\} \\ &= \frac{1}{\lambda}[B]_n(x, y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $n \geq 0$

$$[\lambda B]_n\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}[B]_n(x, y),$$

de tal manera que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} [\lambda B]_n\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} \bigcup_{n=0}^{\infty} [B]_n(x, y).$$

Ahora como B es bihipercíclica, existe un $(x, y) \in X \times X$ tal que $orb((x, y), B)$ es densa en X , luego que, $\frac{1}{\lambda} orb((x, y), B) = \frac{1}{\lambda} \bigcup_{n=0}^{\infty} [B]_n(x, y)$ es densa en X , en efecto $\bigcup_{n=0}^{\infty} [\lambda B]_n \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda} \right)$ también es densa en X y por lo tanto λB es bihipercíclica. ■

A continuación se introduce la definición de cuasiconjugada y conjugada para funciones bilineales.

Definición 5. [6] Sea $C : X \times X \rightarrow X$ y $B : Y \times Y \rightarrow Y$ funciones bilineales.

- a) Entonces C es cuasiconjugada a B si existe una aplicación continua definida como $\phi : Y \rightarrow X$ con rango denso tal que para toda $x, y \in Y$, se cumple que $C(\phi(x), \phi(y)) = \phi(B(x, y))$, esto es, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y & \xrightarrow{B} & Y \\ \phi \times \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ X \times X & \xrightarrow{C} & X \end{array}$$

- b) Si ϕ es un homeomorfismo entonces B y C son llamadas conjugadas.

La noción de transformación cuasiconjugada es una herramienta muy útil, ya que si un operador lineal tiene una propiedad y es cuasiconjugado a otro operador lineal, entonces este hereda la propiedad. En particular, la hiperciclicidad se preserva bajo la cuasiconjugación (envía vectores hipercíclicos a vectores hipercíclicos, ver [2]), lo análogo es aplicable en funciones bilineales.

Teorema 3. Sea B una función bilineal bihipercíclica y C una función bilineal que es cuasiconjugada a B . Entonces C también es bihipercíclica. Más precisamente, si (x, y) es bihipercíclico para B entonces $(\phi(x), \phi(y))$ es bihipercíclico para C .

Demostración. Primero se demostrará, que para cualquier $x, y \in Y$,

$$orb((\phi(x), \phi(y)), C) = \phi(orb((x, y), B)).$$

Sólo basta demostrar, que para cualquier $x, y \in Y$, y $n \geq 0$

$$[C]_n(\phi(x), \phi(y)) = \phi([B]_n(x, y)). \tag{3}$$

Se procede por inducción. Para $n = 0$, se tiene

$$[C]_0(\phi(x), \phi(y)) = \{\phi(x), \phi(y)\} = \phi(\{x, y\}) = \phi([B]_0(x, y)).$$

Ahora, sea $n \geq 1$. Suponga que (3) se cumple para toda $k < n$. Entonces para $k = n$,

$$\begin{aligned}
 [C]_n(\phi(x), \phi(y)) &= \\
 &= \{C(u, v) : \exists j \in \{0, \dots, n-1\}, \\
 &\quad u \in [C]_j(\phi(x), \phi(y)), v \in [C]_{n-1-j}(\phi(x), \phi(y))\} \\
 &= \{C(u, v) : \exists j \in \{0, \dots, n-1\}, u \in \phi([B]_j(x, y)), v \in \phi([B]_{n-1-j}(x, y))\} \\
 &= \{C(\phi(u'), \phi(v')) : \exists j \in \{0, \dots, n-1\}, u' \in [B]_j(x, y), v' \in [B]_{n-1-j}(x, y)\} \\
 &= \phi(\{B(u', v') : \exists j \in \{0, \dots, n-1\}, u' \in [B]_j(x, y), v' \in [B]_{n-1-j}(x, y)\}) \\
 &= \phi([B]_n(x, y)).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $n \geq 0$,

$$[C]_n(\phi(x), \phi(y)) = \phi([B]_n(x, y)),$$

así

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} [C]_n(\phi(x), \phi(y)) = \phi\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} [B]_n(x, y)\right),$$

de tal manera que

$$\text{orb}((\phi(x), \phi(y)), C) = \phi(\text{orb}((x, y), B)).$$

Ahora se demostrará que si B es bihipercíclica, B y C son cuasiconjugadas entonces C es bihipercíclica. Como B es bihipercíclica, entonces existe un par o un vector $(x, y) \in Y \times Y$ tal que $\text{orb}((x, y), B)$ es densa en Y , así se tiene que $\phi(\overline{\text{orb}((x, y), B)}) = \phi(Y)$ y ϕ con rango denso se tiene $\phi(Y) = X$.

Luego,

$$\begin{aligned}
 X &= \overline{\phi(Y)} = \overline{\phi(\overline{\text{orb}((x, y), B)})} \subset \overline{\phi(\text{orb}((x, y), B))} = \overline{\text{orb}((\phi(x), \phi(y)), C)} \\
 &\subset X.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{\text{orb}((\phi(x), \phi(y)), C)} = X$, así C es bihipercíclica y se tiene que $(\phi(x), \phi(y)) \in BHC(C)$. ■

Ejemplo 1. Para cualquier $\lambda \neq 0$, B y λB son funciones bilineales conjugadas via $\phi(x) = \frac{1}{\lambda}x$.

Primero se demostrará que B es cuasiconjugada a λB , con $\lambda \neq 0$.

Sea $\phi : Y \rightarrow X$ definida como $\phi(x) = \frac{1}{\lambda}x$, una aplicación continua con rango denso. Para toda $x, y \in Y$, se cumple que

$$\begin{aligned} \lambda B(\phi(x), \phi(y)) &= \lambda B\left(\frac{1}{\lambda}x, \frac{1}{\lambda}y\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}B(x, y) \\ \phi(B(x, y)) &= \frac{1}{\lambda}B(x, y) \end{aligned}$$

y por lo tanto $\lambda B(\phi(x), \phi(y)) = \phi(B(x, y))$, esto es, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y & \xrightarrow{B} & Y \\ \phi \times \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ X \times X & \xrightarrow{\lambda B} & X \end{array}$$

En efecto B es cuasiconjugada a λB , con $\lambda \neq 0$. Adicionalmente, como $\phi(x)$ es biyectiva y $\phi^{-1}(x)$ es continua, se tiene que $\phi(x)$ es un homeomorfismo, lo cual implica que B es conjugada a λB , con $\lambda \neq 0$, via $\phi(x) = \frac{1}{\lambda}x$. \square

3 Ejemplos de funciones bilineales bihipercíclicas

En esta sección se mostrarán los primeros ejemplos de funciones bihipercíclicas.

Proposición 1. *Sea B una función bilineal tal que hay algún $x \in X$ para el cual el operador $T = B(x, \cdot) : X \rightarrow X$ es hipercíclico. Entonces B es bihipercíclica. Más precisamente, si y es un vector hipercíclico para T entonces (x, y) es bihipercíclico para B .*

Demostración. Sea $y \in HC(T)$, lo cual implica que la orb(y, T) es densa en X . Los elementos de la órbita de $y \in X$ bajo T son de la forma: $Ty = B(x, y)$, $T^2y = B(x, B(x, y))$, $T^3y = B(x, B(x, B(x, y)))$, ..., así se puede deducir que $orb(y, T) \subset orb((x, y), B)$ y por lo tanto, (x, y) es un par bihipercíclico para B , $(x, y) \in BHC(B)$. ■

A continuación, se presenta el estudio de las funciones bilineales continuas sobre $\ell^2 \times \ell^2$ que pueden ser bihipercíclicas, usando la siguiente definición, $f \otimes g(v, w) = f(v)g(w)$, donde f es un funcional y g un operador sobre X .

Ejemplo 2. *Sea T un operador hipercíclico sobre X y $x^* \neq 0$ un funcional lineal continuo sobre X . Entonces la función bilineal*

$$B = x^* \otimes T \tag{4}$$

es bihipercíclica.

En forma general, se tiene que $B(x, y) = x^* \otimes T(x, y) = x^*(x)T(y)$. En efecto, sea $x \in X$ tal que $x^*(x) = 1$, así $B(x, y) = T(y)$ y por Proposición 1 con y un vector hipercíclico para T entonces (x, y) es un vector bihipercíclico para B . Por lo tanto, B es bihipercíclica.

En particular, sea $\mathcal{B} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ el operador traslación a la izquierda, se define $T = 2\mathcal{B}$, T es hipercíclico. Este resultado fue desarrollado por Rolewicz en 1969, y es el primer operador lineal hipercíclico en espacios de Banach. Ahora, sea $x^* : \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal continuo, el cual puede ser representado en términos del producto interior, donde para cualquier $x \in \ell^2$, existe un $y' \in \ell^2$, tal que

$$x^*(x) = \langle x, y' \rangle;$$

en efecto, tomando $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell^2$, $y' = (1, 0, 0, 0, \dots) \in \ell^2$, se tiene que $x^*(x) = x_1$.

Luego, con $y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in \ell^2$, se halla (1), usando la definición de \otimes , x^* y T , donde se tiene

$$\begin{aligned} B(x, y) &= x^* \otimes T(x, y), \\ &= x^*(x)T(y), \\ &= x_1(2y_2, 2y_3, \dots), \\ &= 2x_1\mathcal{B}(y), \end{aligned}$$

por lo tanto B es bihipercíclica, ya que $orb(y, T) \subset orb((x, y), B)$. De la misma manera, si $x_1 = 1$, $B(x, y) = 2\mathcal{B}(y)$, con y un vector hipercíclico para $2\mathcal{B}$ entonces (x, y) es un vector bihipercíclico para B . \square

Ejemplo 3. Sea T un operador hipercíclico no inyectivo sobre X , $x \in X$, con $x \neq 0$, tal que $Tx = 0$ y sea $x^* \neq 0$ un funcional lineal continuo sobre X con $x^*(x) = 1$. Entonces

$$B = x^* \otimes T + T \otimes x^*$$

es bihipercíclica y simétrica.

En forma general, sea $x \in X$, $x \neq 0$ tal que $Tx = 0$ y $x^*(x) = 1$, así se tiene que

$$\begin{aligned} B(x, y) &= (x^* \otimes T + T \otimes x^*)(x, y) \\ &= x^* \otimes T(x, y) + T \otimes x^*(x, y) \\ &= x^*(x)T(y) + T(x)x^*(y) \\ &= 1T(y) + 0x^*(y) \\ &= T(y). \end{aligned}$$

y por Proposición 1 con y un vector hipercíclico para T entonces (x, y) es un vector bihipercíclico para B . Por lo tanto, B es bihipercíclica. Además, se tiene que $B(x, y) = B(y, x)$ y por lo tanto B es simétrica.

En particular, sea $\mathcal{B} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ el operador traslación a la izquierda, $T = 2\mathcal{B}$ es hipercíclico. Hallando (4) se toma del Ejemplo anterior las definiciones de \otimes, x^*, x y y , se tiene,

$$\begin{aligned} B(x, y) &= (x^* \otimes T + T \otimes x^*)(x, y), \\ &= x^* \otimes T(x, y) + T \otimes x^*(x, y), \\ &= x^*(x)T(y) + T(x)x^*(y), \\ &= x_1(2y_2, 2y_3, \dots) + (2x_2, 2x_3, \dots)y_1, \\ &= 2x_1\mathcal{B}(y) + 2y_1\mathcal{B}(x), \\ &= 2x_1\mathcal{B}(y) + 2y_1\mathcal{B}(x), \end{aligned}$$

así B es bihipercíclica, ya que $orb(y, T) \subset orb((x, y), B)$. De la misma manera, por hipótesis se tiene que $x^*(x) = 1$ y $Tx = 0$, así $B(x, y) = Ty = 2\mathcal{B}(y)$, siendo y un vector hipercíclico para T entonces (x, y) es un vector bihipercíclico para B . Además, como $B(x, y) = B(y, x)$ entonces B es simétrica. \square

Ahora se estudian funciones bilineales continuas sobre $\ell^1 \times \ell^1$ que pueden ser bihipercíclicas, usando la definición de convolución. Sean $x, y \in \ell^1(\mathbb{N}_0)$, su convolución esta definida por

$$\begin{aligned} x * y &= \left(\sum_{k=0}^n x_k y_{n-k} \right)_{n \geq 0} \\ &= (x_0 y_0, x_0 y_1 + x_1 y_0, x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0, \\ &\quad x_0 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0, \dots). \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Sea \mathcal{B} el operador traslación a la izquierda sobre ℓ^1 . Entonces la función bilineal

$$B(x, y) = x * (\mathcal{B}y)$$

es bihipercíclica sobre ℓ^1 .

Esto sigue de la Proposición 1 y del hecho que

$$\begin{aligned} B(2e_0, y) &= 2e_0 * (\mathcal{B}y), \\ &= (2, 0, 0, \dots) * (y_1, y_2, y_3, \dots), \\ &= (2y_1, 2y_2 + 0y_1, 2y_3 + 0y_2 + 0y_1, 2y_4 + 0y_3 + 0y_2 + 0y_1, \dots), \\ &= (2y_1, 2y_2, 2y_3, 2y_4, \dots), \\ &= 2\mathcal{B}y, \end{aligned}$$

así $B(2e_0, \cdot) = 2\mathcal{B}$ es hipercíclico, donde $e_0 = (1, 0, 0, \dots)$. De tal manera que, B es bihipercíclica sobre ℓ^1 .

Asimismo, la simetría invariante sobre B definida como

$$B(x, y) = x * (\mathcal{B}y) + (\mathcal{B}x) * y$$

es también bihipercíclica, ya que,

$$\begin{aligned} B(2e_0, y) &= 2e_0 * (\mathcal{B}y) + \mathcal{B}(2, 0, 0, \dots) * y, \\ &= (2, 0, 0, \dots) * (y_1, y_2, y_3, \dots) + (0, 0, 0, \dots) * (y_0, y_1, y_2, \dots), \\ &= (2y_1, 2y_2 + 0y_1, 2y_3 + 0y_2 + 0y_1, 2y_4 + 0y_3 + 0y_2 + 0y_1, \dots) + \\ &\quad (0y_0, 0y_1 + 0y_0, 0y_2 + 0y_1 + 0y_0, 0y_3 + 0y_2 + 0y_1 + 0y_0, \dots), \\ &= (2y_1, 2y_2, 2y_3, 2y_4, \dots) + (0, 0, 0, \dots), \\ &= 2\mathcal{B}y. \quad \square \end{aligned}$$

4 Bihipercíclicidad y n-upla hipercíclica

Esta sección permite conectar el nuevo concepto de funciones bilineales bihipercíclicas con las n -uplas hipercíclicas. Una n -upla de operadores se define como $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$, donde $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(X)^n$ conmuta, es decir, $T_j T_k = T_k T_j$ para $1 \leq j, k \leq n$, la cual es hipercíclica si existe un $x \in X$ tal que

$$\text{orb}(y, \mathbf{T}) = \{T_1^{b_1} T_2^{b_2} \dots T_n^{b_n}(x) : b_i \in \mathbb{N}_0\}$$

es densa en X .

Proposición 2. *Sea B una función bilineal tal que hay algún $x \in X$ para el cual los operadores $T_1 = B(x, \cdot)$, $T_2 = B(T_1 x, \cdot)$, \dots , $T_n = B(T_{n-1} x, \cdot)$ conmutan y forman un n -upla hipercíclica. Entonces B es bihipercíclica. Más precisamente, si y es hipercíclico para esta n -upla, entonces (x, y) es bihipercíclico para B .*

Demostración. Como la n -upla es hipercíclica, existe un $y \in X$ tal que

$$\text{orb}(y, \mathbf{T}) = \{T_1^{b_1} T_2^{b_2} \dots T_n^{b_n}(y) : b_i \in \mathbb{N}_0\}$$

es densa en X . Los elementos de la órbita de y bajo \mathbf{T} , son de la forma:

$$\begin{aligned} T_1 T_2(y) &= T_1(B(T_1 x, y)) = B(x, B(T_1 x, y)) = B(x, B(B(x, x), y)) \\ T_2 T_1(y) &= T_2(B(x, y)) = B(T_1 x, B(x, y)) = B(B(x, x), B(x, y)) \end{aligned}$$

estos son también elementos de la órbita de (x, y) bajo B , así, se tiene que

$$\{T_1^{b_1}T_2^{b_2} \dots T_n^{b_n}(y) : b_i \in \mathbb{N}_0\} \subset orb((x, y), B),$$

por lo tanto B es bihipercíclica. ■

Ejemplo 5. Sea T_1, \dots, T_n una n -upla hipercíclica; suponga que $x \in X$, tal que $x, T_1x, \dots, T_{n-1}x$ son linealmente independientes, se tiene que el conjunto $\{x, T_1x, \dots, T_{n-1}x\} \subset X$, entonces aplicando el Teorema de Hahn-Banach (Si M es un subespacio de X y $x_0 \notin M$ entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x_0) = 0$ y $x^*(x_0) = 1$ si $x_0 \in M$), se pueden seleccionar funcionales lineales $x_k^* \in X^*$, tal que $x_k^*(T_{l-1}x) = \delta_{k,l}$, con valores de $k, l = 1, 2, \dots, n$, donde $T_0 = I$ y $\delta_{k,l} = 1$ cuando $k = l$, de lo contrario $\delta_{k,l} = 0$ ($\delta_{k,l}$ llamado delta de Kronecker). Entonces

$$B = \sum_{k=1}^n x_k^* \otimes T_k \tag{5}$$

es bihipercíclica.

En forma general, sea T_1, \dots, T_n una n -upla hipercíclica, suponga que $x \in X$, tal que $x, T_1x, \dots, T_{n-1}x$ son linealmente independientes, aplicando la definición de \otimes y de los x_k^* en (5), se tiene

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \sum_{k=1}^n x_k^* \otimes T_k(x, y), \\ &= x_1^* \otimes T_1(x, y) + x_2^* \otimes T_2(x, y) + x_3^* \otimes T_3(x, y) + \dots + \\ &\quad + x_n^* \otimes T_n(x, y), \\ &= x_1^*(x)T_1(y) + x_2^*(x)T_2(y) + x_3^*(x)T_3(y) + \dots + x_n^*(x)T_n(y), \\ &= 1T_1(y) + 0T_2(y) + 0T_3(y) + \dots + 0T_n(y), \\ &= T_1(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(T_1x, y) &= \sum_{k=1}^n x_k^* \otimes T_k(T_1x, y), \\ &= x_1^* \otimes T_1(T_1x, y) + x_2^* \otimes T_2(T_1x, y) + \dots + x_n^* \otimes T_n(T_1x, y), \\ &= x_1^*(T_1x)T_1(y) + x_2^*(T_1x)T_2(y) + x_3^*(T_1x)T_3(y) + \dots + \\ &\quad + x_n^*(T_1x)T_n(y), \\ &= 0T_1(y) + 1T_2(y) + 0T_3(y) + \dots + 0T_n(y), \\ &= T_2(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(T_2x, y) &= \sum_{k=1}^n x_k^* \otimes T_k(T_2x, y), \\
&= x_1^* \otimes T_1(T_2x, y) + x_2^* \otimes T_2(T_2x, y) + x_3^* \otimes T_3(T_2x, y) + \dots + \\
&\quad + x_n^* \otimes T_n(T_2x, y), \\
&= x_1^*(T_2x)T_1(y) + x_2^*(T_2x)T_2(y) + x_3^*(T_2x)T_3(y) + \dots + \\
&\quad + x_n^*(T_2x)T_n(y), \\
&= 0T_1(y) + 0T_2(y) + 1T_3(y) + \dots + 0T_n(y), \\
&= T_3(y),
\end{aligned}$$

y de la misma manera se procede con $B(T_3x, y), B(T_4x, y), \dots, B(T_{n-1}x, y)$. Por lo tanto, con y hipercíclico para esta n -upla entonces (x, y) es bihipercíclico para B , así B es bihipercíclica.

En particular, se demostrará que $B(x, y) = x_2\mathcal{B}y + 2x_1y$ es una función bilineal bihipercíclica. Sea $\mathcal{B} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ el operador traslación a la izquierda e I el operador identidad, $T_k = (\mathcal{B}, 2I)$ es un par hipercíclico, ver [5]. Ahora, sea $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^2$, donde $x, T_1(x)$ son linealmente independientes; se define $x_1^* : \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $x_1^*(x) = x_2$ y $x_2^* : \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$ como $x_2^*(x) = x_1$.

Así x_1^* aplicado a x y a $T_1(x)$,

$$\begin{aligned}
x_1^*(T_0x) &= x_1^*(x) = x_2 = 1, \\
x_1^*(T_1x) &= x_1^*(\mathcal{B}(x)) = x_1^*(x_2, x_3, x_4, \dots) = x_1^*(1, 0, 0, 0, \dots) = 0,
\end{aligned}$$

y x_2^* aplicado a x y a $T_1(x)$

$$\begin{aligned}
x_2^*(T_0x) &= x_2^*(x) = x_1 = 0, \\
x_2^*(T_1x) &= x_2^*(\mathcal{B}(x)) = x_2^*(1, 0, 0, 0, \dots) = 1,
\end{aligned}$$

cumplen con las hipótesis del Ejemplo, entonces

$$\begin{aligned}
B(x, y) &= \sum_{k=1}^2 x_k^* \otimes T_k(x, y), \\
&= x_1^* \otimes T_1(x, y) + x_2^* \otimes T_2(x, y), \\
&= x_1^*(x)T_1(y) + x_2^*(x)T_2(y), \\
&= x_2\mathcal{B}y + 2x_1y,
\end{aligned}$$

es bihipercíclica. Por lo tanto, con y hipercíclico para este par de operadores entonces (x, y) es bihipercíclico para B . \square

Es importante mencionar, que aunque Feldman [5] demostró que existe una $(n + 1)$ -upla $(T_1, T_2, \dots, T_n, T_{n+1})$ de matrices diagonales hipercíclica sobre \mathbb{C}^n , este resultado, no puede ser aplicado para demostrar la existencia de funciones bilineales bihipercíclicas, ya que para un $x \in \mathbb{C}^n$, se tiene que $x, T_1x, T_2x, \dots, T_nx$ son linealmente dependientes. Por otra parte, Shakarín [12] demostró que el minimal (valor más pequeño) de N , para que una N -upla de matrices diagonales sea hipercíclica sobre \mathbb{C}^n es $n + 1$.

Referencias

- [1] Ansari, S. (1997) “Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces”, *J. Funct. Anal.* **148**(2): 384–390.
- [2] Bayart, F.; Matheron, É. (2009) *Dynamics of Linear Operator*. Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press.
- [3] Bernal-González, L. (1999) “On hypercyclic operators on Banach spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127**(4): 1003–1010.
- [4] Costakis, G.; Hadjiloucas, D.; Manoussos, A. (2009) “Dynamics of tuples of matrices”, *American Mathematical Society* **137**(3): 1025–1034.
- [5] Feldman, N. (2008) “Hypercyclic tuples of operators and somewhere dense orbits”, *J. Math. Anal. Appl.* **346**(1): 82–98.
- [6] Grosse-Erdmann, K.; Kim, S. (2013) “Bihipercyclic bilinear mappings”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **399**(2): 701–708.
- [7] Grosse-Erdmann, K.; Peris, A. (2011) *Linear Chaos*. Springer-Verlag, London–New York.
- [8] Kitai, C. (1982) *Invariant Closed Sets for Linear Operators*. Ph.D. thesis, Universidad de Toronto, Canada.
- [9] León, F.; Muller, V. (2004) “Rotations of hypercyclic and supercyclic operators”, *Integral Equations Operator Theory* **50**(1): 385–391.
- [10] Rolewicz, S. (1969) “On orbits of elements”, *Studia Math.* **32**(1): 17–22.
- [11] Shapiro, J. (2001) “Notes on the dynamics of linear operators”, en: <http://www.mth.msu.edu/~shapiro/Pubvit/Downloads/LinDynamics/lindynamics.pdf>, consultada 11-May-2013, 8:00 a.m.

- [12] Shkarin, S. (2011) “Hypercyclic tuples of operators on \mathbb{C}^n and \mathbb{R}^n ”, *Linear and Multilinear Algebra* **60**(8): 885–896.