

PRECONDICIONAMIENTO DEL MÉTODO LDG
PARA LA ECUACIÓN VECTORIAL DE
HELMHOLTZ

PRECONDITIONING OF THE LDG METHOD FOR
THE VECTOR HELMHOLTZ EQUATION

ARLIN ALVARADO* PAUL CASTILLO[†]

*Received: 4 Sep 2014; Revised: 7 Apr 2016;
Accepted: 11 Apr 2016*

*Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad de Puerto Rico. Mayagüez, Puerto Rico. E-Mail: arlin.alvarado@upr.edu

[†]Misma dirección que/Same address as: A. Alvarado. E-Mail: paul.castillo@upr.edu

Resumen

Se presenta un estudio numérico de un preconditionador para la ecuación vectorial de Helmholtz; el cual se deriva de la técnica del Laplaciano desplazado. Se utiliza una nueva versión del método “Local Discontinuous Galerkin” (LDG) como técnica de discretización espacial. Se valida la escalabilidad del preconditionador mediante una serie de experimentos numéricos en dominios poliédricos y aproximaciones de alto orden en problemas de bajas frecuencias en el caso real.

Palabras clave: preconditionamiento; ecuación vectorial de Helmholtz; método LDG.

Abstract

A numerical study of a preconditioner for the vector Helmholtz equation based on the shifted Laplacian preconditioning technique is presented. The Local Discontinuous Galerkin (LDG) method is used as spatial discretization technique. Scalability of the preconditioner is validated on a series of numerical experiments in polyhedral domains for high order approximations on low frequency problems in the real case.

Keywords: preconditioning; vector Helmholtz equation; LDG method.

Mathematics Subject Classification: 65K05, 65N30, 65N55.

1 Introducción

El modelo matemático comúnmente utilizado para describir diversos fenómenos físicos que ocurren en nuestro alrededor, producto de la interacción de campos eléctricos y magnéticos, carga y corriente eléctrica, se describe en la teoría electromagnética propuesta por J.C. Maxwell, [25, 26], simplemente conocida como ecuaciones de Maxwell.

En algunos procesos termo-eléctricos de interés práctico se puede asumir que los campos electromagnéticos varían de manera senoidal con respecto al tiempo como, por ejemplo, el conformado eléctrico o proceso de deformación de piezas metálicas sometidas a la acción de campos electromagnéticos de gran intensidad [18]; en soldadura eléctrica donde se estudia el comportamiento termo-eléctrico de los electrodos y del material de soldadura, producto del efecto de Joule, [13, 6]; y, en el diseño de circuitos eléctricos que trabajan con señales digitales y analógicas, para poder determinar la variación de la capacitancia, resistencia e inductancia eléctrica del sistema por medio del campo eléctrico y magnético [32, 15]. Dada una frecuencia fija y aplicando la transformación de

Fourier en tiempo, las ecuaciones de Maxwell se reducen a un conjunto de ecuaciones estacionarias en el dominio de la frecuencia; las cuales a su vez pueden ser compactadas en una sólo ecuación diferencial de segundo orden conocida como *ecuación vectorial de Helmholtz*.

Este tipo de aplicaciones se modela por lo general en dominios cuyas geometrías son muy complejas; las propiedades de los materiales: tensores de permeabilidad magnética y permitividad eléctrica pueden ser anisotrópicos y/o discontinuos a trozos. En estos casos, es poco probable; sino imposible, obtener una expresión cerrada o analítica para la solución de dicha ecuación; por lo que su aproximación numérica es fundamental.

En la última década se han propuesto una serie de métodos numéricos, basados en discretizaciones espaciales discontinuas, para aproximar la solución de la ecuación de Helmholtz a bajas frecuencias, también conocido como problema de corrientes de Foucault, (o corrientes de Eddy en la literatura anglosajona), [28, 27, 23, 22, 7, 17]. Este tipo de métodos se caracteriza principalmente por no imponer ningún tipo de continuidad entre celdas adyacentes; por lo que su formulación es naturalmente apropiada para refinamiento en espacio y en el grado de aproximación. Además permiten el uso de mallas generales como aquellas que poseen nodos colgantes.

El método considerado en este artículo se conoce como “Local Discontinuous Galerkin” (LDG); originalmente propuesto por Cockburn y Shu [14] para problemas transitorios no lineales de convección-difusión. La selección de este método es motivada por el estudio teórico y numérico realizado por Castillo en [8] para un problema modelo de difusión lineal, donde se muestra cierta superioridad en precisión y estabilidad en comparación a otros métodos similares. El análisis de convergencia para problemas de difusión en el caso estacionario fue presentado en [10].

En [27], Perugia y Schötzau presentan el primer y único trabajo teórico sobre la convergencia hp de una versión del método LDG aplicado al problema de corrientes de Foucault. El desempeño numérico del método LDG aplicado a la ecuación vectorial de Helmholtz en dominios poliédricos fue discutido por primera vez en Alvarado [2]; y, Alvarado y Castillo [3]. A diferencia de la versión propuesta en [27], Alvarado y Castillo utilizan una versión del método LDG que permite una reducción sustancial del patrón, lo cual es de gran interés desde el punto de vista computacional.

El propósito del presente artículo es el estudio del rendimiento de la técnica de preconditionamiento propuesta originalmente por Bayliss, Goldstein y Turkel en [5] para la ecuación de Helmholtz escalar, operador *div-grad*. En este trabajo se adapta esta técnica de preconditionamiento a la versión del método LDG

estudiada recientemente en [2, 3]. Aprovechando la estructura por bloques de la matriz de rigidez, típica de los métodos discontinuos, se estudia el desempeño del preconditionador utilizando una versión por bloques. El preconditionador es de tipo algebraico y su implementación no depende del grado de aproximación local.

2 Ecuación vectorial de Helmholtz

Asumiendo que los campos electromagnéticos dependen de manera senoidal con respecto al tiempo, se tienen las siguientes expresiones en notación fasorial para el campo eléctrico $\mathcal{E}(x, t)$, el campo magnético $\mathcal{H}(x, t)$, el campo de desplazamiento eléctrico $\mathcal{D}(x, t)$ y el campo de inducción magnética $\mathcal{B}(x, t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, t) &= \text{Real} [\mathbf{E}(x)e^{-i\omega t}], \\ \mathcal{D}(x, t) &= \text{Real} [\mathbf{D}(x)e^{-i\omega t}], \\ \mathcal{B}(x, t) &= \text{Real} [\mathbf{B}(x)e^{-i\omega t}], \\ \mathcal{H}(x, t) &= \text{Real} [\mathbf{H}(x)e^{-i\omega t}],\end{aligned}$$

donde los campos de valor complejo, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ y $\mathbf{B}$; que dependen únicamente de la posición, representan la transformada de Fourier en tiempo de los campos $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente para una frecuencia ω fija. Además se asumen las siguientes relaciones constitutivas para el desplazamiento eléctrico e inducción magnética, en notación fasorial:

$$\mathbf{D}(x) = \varepsilon(x)\mathbf{E}(x) \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(x) = \mu(x)\mathbf{H}(x).$$

Los tensores ε y μ , $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, representan las propiedades del medio: permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, respectivamente. Aplicando la transformada de Fourier a las ecuaciones de Maxwell y utilizando las expresiones en notación fasorial anteriores, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones estacionarias para una frecuencia fija ω :

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J}_f \tag{2}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon\mathbf{E}) = \rho \tag{3}$$

$$\nabla \cdot (\mu\mathbf{H}) = 0. \tag{4}$$

Estas ecuaciones se les conoce como ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia o *tiempo-armónico*. Combinando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene

una ecuación de segundo orden en el dominio de la frecuencia, conocida por *ecuación vectorial de Helmholtz*:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad \text{donde } \mathbf{J} = i\omega \mathbf{J}_f. \quad (5)$$

Esta ecuación se cumple en un dominio acotado y conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, cuya frontera Γ , es de Lipschitz; en la cual se consideran condiciones de frontera de un medio cuya densidad de carga eléctrica superficial $\mathbf{g}$ es producida por un campo electromagnético externo:

$$\vec{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{g}, \text{ en } \Gamma,$$

donde $\vec{n}$ es el vector normal en dirección hacia afuera de la frontera.

3 Formulación del método LDG

La formulación variacional del método LDG aplicado a la ecuación de Helmholtz, Ecn. (5), consiste en introducir la variable, $\mathbf{Q} = -\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}$; y luego reformular el problema original como un sistema de ecuaciones de primer orden en las variables $\mathbf{Q}$ (variable auxiliar) y $\mathbf{E}$ (variable primaria):

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{Q} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \text{ en } \Omega, \\ -\nabla \times \mathbf{Q} - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} &= \mathbf{J} \text{ en } \Omega. \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{T}_h$ una partición de Ω formada por un conjunto de tetraedros, T , los cuales son afín equivalentes a un tetraedro de referencia T_o . Se denotará por $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las caras de la triangulación $\mathcal{T}_h$. Este conjunto se particiona en dos subconjuntos disjuntos: $\mathcal{F}_I$ caras interiores y $\mathcal{F}_D$ caras de frontera. El método LDG busca una aproximación $(\mathbf{E}_h, \mathbf{Q}_h)$ de $(\mathbf{E}, \mathbf{Q})$, en el espacio de elemento finito $\mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h$ donde

$$\mathcal{V}_h = \prod_{T \in \mathcal{T}_h} \mathbb{P}_{k_T}^3(T)$$

y $\mathbb{P}_{k_T}(T)$ es el espacio de polinomios de grado menor o igual a k_T con $k_T \geq 1$, definidos en T . Nótese que el grado de aproximación puede variar celda a celda. Además contrario al método clásico de elemento finito, el espacio de aproximación no impone ningún tipo de continuidad, por lo que el método es completamente natural para adaptividad en espacio y grado de aproximación (*hp*-adaptabilidad). Dicha aproximación satisface el sistema lineal:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{Q}_h, \mathbf{r}) + b_1(\mathbf{E}_h, \mathbf{r}) &= l_1(\mathbf{r}) \\ b_2(\mathbf{Q}_h, \mathbf{v}) + c(\mathbf{E}_h, \mathbf{v}) + s(\mathbf{E}_h, \mathbf{v}) &= l_2(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

donde las formas sesquilineales $a(\cdot, \cdot)$, $b_1(\cdot, \cdot)$, $b_2(\cdot, \cdot)$, $c(\cdot, \cdot)$ y $s(\cdot, \cdot)$ de $\mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h \rightarrow \mathbb{C}$ están definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{Q}_h, \mathbf{r}) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mu \mathbf{Q}_h \cdot \bar{\mathbf{r}}, \\ b_1(\mathbf{E}_h, \mathbf{r}) &= \sum_{S \in \mathcal{F}_I} \oint_S [\widehat{\mathbf{E}}_h \times \bar{\mathbf{r}}]_{\mathcal{N}} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{E}_h \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{r}}, \\ b_2(\mathbf{Q}_h, \mathbf{v}) &= - \sum_{S \in \mathcal{F}_I} \oint_S [\widehat{\widehat{\mathbf{Q}}}_h \times \bar{\mathbf{v}}]_{\mathcal{N}} - \sum_{S \in \mathcal{F}_D} \oint_S \widehat{\widehat{\mathbf{Q}}}_h \times \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_T - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{Q}_h \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{v}}, \\ s(\mathbf{E}_h, \mathbf{v}) &= \sum_{S \in \mathcal{F}_I} \oint_S \frac{\eta_S}{h_S} [\mathbf{E}_h]_{\mathcal{T}} \cdot [\bar{\mathbf{v}}]_{\mathcal{T}} + \sum_{S \in \mathcal{F}_D} \oint_S \frac{\eta_S}{h_S} (\mathbf{E}_h \times \bar{\mathbf{n}}_T) \cdot (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{n}}_T), \\ c(\mathbf{E}_h, \mathbf{v}) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \omega^2 \int_T \varepsilon \mathbf{E}_h \cdot \bar{\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Los términos $[\mathbf{E}_h]_{\mathcal{N}}$ y $[\mathbf{E}_h]_{\mathcal{T}}$ representan el salto normal y tangencial, respectivamente, y se definen por

$$[\mathbf{E}_h]_{\mathcal{N}} = \mathbf{E}_h^1 \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 + \mathbf{E}_h^2 \cdot \bar{\mathbf{n}}_2 \quad \text{y} \quad [\mathbf{E}_h]_{\mathcal{T}} = \mathbf{E}_h^1 \times \bar{\mathbf{n}}_1 + \mathbf{E}_h^2 \times \bar{\mathbf{n}}_2.$$

Los funcionales lineales $l_1(\cdot)$ y $l_2(\cdot)$ de $\mathcal{V}_h \rightarrow \mathbb{C}$ se definen de la siguiente manera:

$$l_1(\mathbf{r}) = \sum_{S \in \mathcal{F}_D} \oint_S \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{r}} \quad \text{y} \quad l_2(\mathbf{v}) = - \sum_{S \in \mathcal{F}_D} \frac{\eta_S}{h_S} \oint_S \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{v}} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{v}}.$$

Las cantidades $\widehat{\mathbf{E}}_h$ y $\widehat{\widehat{\mathbf{Q}}}_h$, llamadas *flujos numéricos*, son aproximaciones de las trazas de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{Q}$ respectivamente. A diferencia de [27], aquí se utilizan flujos numéricos definidos a partir de combinaciones convexas de los valores del campo. Esto permite un mayor control sobre la cantidad de memoria necesaria para el almacenamiento de la matriz de rigidez o complemento de Schur [2, 3]. Sea $\mathcal{S}$ una cara compartida por las celdas T_1 y T_2 , $\mathcal{S} = T_1 \cap T_2$, entonces

$$\widehat{\mathbf{E}}_h = \zeta_{\mathcal{S}} \mathbf{E}_h^1 + (1 - \zeta_{\mathcal{S}}) \mathbf{E}_h^2 \quad \text{y} \quad \widehat{\widehat{\mathbf{Q}}}_h = (1 - \zeta_{\mathcal{S}}) \mathbf{Q}_h^1 + \zeta_{\mathcal{S}} \mathbf{Q}_h^2, \quad (6)$$

con $0 \leq \zeta_{\mathcal{S}} \leq 1$. Se consideran tres opciones para el parámetro $\zeta_{\mathcal{S}}$:

1. ζ_0 : para todo $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$, $\zeta_{\mathcal{S}} = 0.5$. Este produce el patrón de máximo tamaño.
2. ζ_1 : para reducir el tamaño del patrón, se escoge de manera aleatoria el valor de $\zeta_{\mathcal{S}}$ en el conjunto $\{0, 1\}$.
3. ζ_2 : dada una dirección $\vec{d}$, se escoge $\zeta_{\mathcal{S}} = 1$ si $\vec{n}_T \cdot \vec{d} > 0$ y $\zeta_{\mathcal{S}} = 0$ en caso contrario.

En [9], Castillo analiza diferentes heurísticas para la reducción del patrón del método aplicado al operador *div-grad*. En [3], Alvarado y Castillo analizan el patrón para el operador *curl-curl* en mallas no estructuradas y muestran que, para mallas Cartesianas, este posee un mayor tamaño que el del operador *div-grad*.

En las caras de borde, $\widehat{\mathbf{E}}_h$ y $\widehat{\mathbf{Q}}_h$ se definen utilizando la corriente superficial:

$$\widehat{\mathbf{E}}_h \times \vec{n} = \vec{g} \quad \text{y} \quad \widehat{\mathbf{Q}}_h = \mathbf{Q}_h.$$

La forma sesquilineal $s(\cdot, \cdot)$ representa un término de estabilidad el cual garantiza la existencia y unicidad del problema discreto. Esta forma de estabilidad numérica ha sido ampliamente utilizada en [22, 23, 27, 28].

Sean D_μ , B_1 , B_2 , S y D_ε la representación matricial de las formas sesquilineales $a(\cdot, \cdot)$, $b_1(\cdot, \cdot)$, $b_2(\cdot, \cdot)$, $s(\cdot, \cdot)$ y $c(\cdot, \cdot)$, respectivamente. En [2], Alvarado muestra que utilizando la definición de flujos dada por las expresiones en (6) se tiene

$$B_2 = -B_1^*.$$

Sea $R = B_1$ entonces el sistema lineal generado por el método LDG se puede escribir la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} D_\mu & R \\ -R^* & S - \omega^2 D_\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_h \\ \mathbf{E}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{\mathbf{Q}_h} \\ b_{\mathbf{E}_h} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Puesto que la matriz D_μ es diagonal por bloques [2], por lo tanto **explícitamente** invertible, la variable auxiliar $\mathbf{Q}_h$ puede ser eliminada mediante eliminación Gaussiana por bloques, obteniendo el sistema reducido

$$\mathcal{A}\mathbf{E}_h = b,$$

donde la matriz $\mathcal{A}$, conocida como *complemento de Schur* y el vector fuente b están definidos por

$$\mathcal{A} = S + R^* D_\mu^{-1} R - \omega^2 D_\varepsilon \quad \text{y} \quad b = R^* D_\mu^{-1} b_{\mathbf{Q}_h} + b_{\mathbf{E}_h}.$$

Cabe resaltar que el ensamblado de $\mathcal{A}$ **no** requiere del almacenamiento global de las matrices D_μ , D_ε , R , R^* y S . En [11], Castillo y Sequeira presentan un algoritmo de ensamblado rápido para el operador *div-grad*. El ensamblado se realiza haciendo un recorrido de la malla y sólo requiere del cálculo de las entradas de estas matrices asociadas a la celda con la cual se está trabajando. Este proceso es además independiente del grado de aproximación que se utiliza en dicha celda. Esta técnica fue adaptada al operador *curl-curl* en [2].

4 Precondicionador

La tarea de resolver el sistema lineal que resulta de la discretización de la ecuación de Helmholtz, independientemente del método de aproximación, ha sido considerado como uno de los retos computacionales más importantes de nuestra época [4, 33]. En el caso de altas frecuencias, la solución exacta presenta un comportamiento altamente oscilatorio por lo que es necesario mallas extremadamente finas, lo que se traduce en un sistema lineal de gran tamaño. Esto conduce al uso de métodos iterativos en lugar de métodos directos, especialmente para problemas en 3D. Desafortunadamente dichas técnicas iterativas, sin el debido uso de un precondicionador, muestran un pobre desempeño debido a la naturaleza indefinida de la matriz de rigidez $\mathcal{A}$.

La mayoría de las técnicas de precondicionamiento han sido diseñadas para la ecuación escalar de Helmholtz. Una de esas técnicas es la denominada *desplazamiento del Laplaciano*, originalmente propuesta por Bayliss, Goldstein y Turkel [5] y recientemente generalizada por Erlangga, Vuik y Oosterlee [20, 19] para diferencias finitas y por Airaksinen, Heikkola, Pennanen y Toivanen en [1] para el método clásico de elemento finito. El precondicionador es simétrico positivo definido y se obtiene sumando un Laplaciano debidamente escalado al operador original. Esta técnica ha sido recientemente analizada y validada numéricamente en [21] y [24] para la versión penalizada del método de elemento finito comúnmente utilizada en electromagnetismo, conocido como, *edge element* o *formas de Whitney*. Sin embargo, hasta la fecha, no ha sido estudiada para discretizaciones espaciales discontinuas.

Tomando la idea general de [5], se considera un precondicionador definido de la siguiente manera

$$M_\alpha = A_0 + \alpha D_\varepsilon,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A_0 = S + R^* D_\mu^{-1} R$ es la matriz simétrica positiva pero no necesariamente definida que corresponde al complemento de Schur para la frecuencia $\omega = 0$. Puesto que el tensor de permitividad eléctrica, ε , es simétrico positivo definido, la matriz D_ε es simétrica positiva definida, por lo tanto M_α

también lo es siempre que $\alpha > 0$. En particular en el caso de bajas frecuencias $\omega \ll 1$ se puede escoger $\alpha = 1 - \omega^2$.

Proposición 1 Sea $\alpha > 0$. Todo valor propio, λ , de $M_\alpha^{-1}\mathcal{A}$ satisface la desigualdad $-\omega^2/\alpha \leq \lambda < 1$.

Demostración: Sea λ un valor propio de $M_\alpha^{-1}\mathcal{A}$ y v un vector propio asociado a λ : $\mathcal{A}v = \lambda M_\alpha v \iff (A_0 - \omega^2 D_\varepsilon)v = \lambda (A_0 + \alpha D_\varepsilon)v$. De donde

$$(D_\varepsilon^{-1}A_0 - \omega^2 I)v = \lambda (D_\varepsilon^{-1}A_0 + \alpha I)v.$$

Luego λ es un auto valor de la matriz $(D_\varepsilon^{-1}A_0 + \alpha I)^{-1}(D_\varepsilon^{-1}A_0 - \omega^2 I)$. Sea λ_ε un valor propio de $D_\varepsilon^{-1}A_0$, aplicando la definición de valores y vectores propios se tiene

$$\lambda = \frac{\lambda_\varepsilon - \omega^2}{\lambda_\varepsilon + \alpha} = 1 - \frac{\alpha + \omega^2}{\lambda_\varepsilon + \alpha}.$$

Siendo A_0 la discretización del operador *curl-curl*, su espectro está contenido en $[0, \infty)$, y como ε es un tensor simétrico positivo definido, entonces $0 \leq \lambda_\varepsilon$. Claramente, para todo $\alpha > 0$ se tiene $\lambda < 1$. Además

$$0 < \alpha \leq \alpha + \lambda_\varepsilon \implies -\frac{\omega^2}{\alpha} = 1 - \frac{\alpha + \omega^2}{\alpha} \leq 1 - \frac{\alpha + \omega^2}{\lambda_\varepsilon + \alpha} = \lambda. \quad \blacksquare$$

En la Figura 1, se muestra el espectro de $M_\alpha^{-1}\mathcal{A}$, para aproximaciones de grado $p = 1$, con $\omega = \frac{1}{4}$ y diferentes opciones de flujo. Nótese que para valores apropiados de α , los valores propios del sistema preconditionado se aglomeraron cerca de 1, sugiriendo que $M_\alpha^{-1}\mathcal{A} \approx I$ y por lo tanto que M_α puede ser una buena alternativa para preconditionar el sistema lineal.

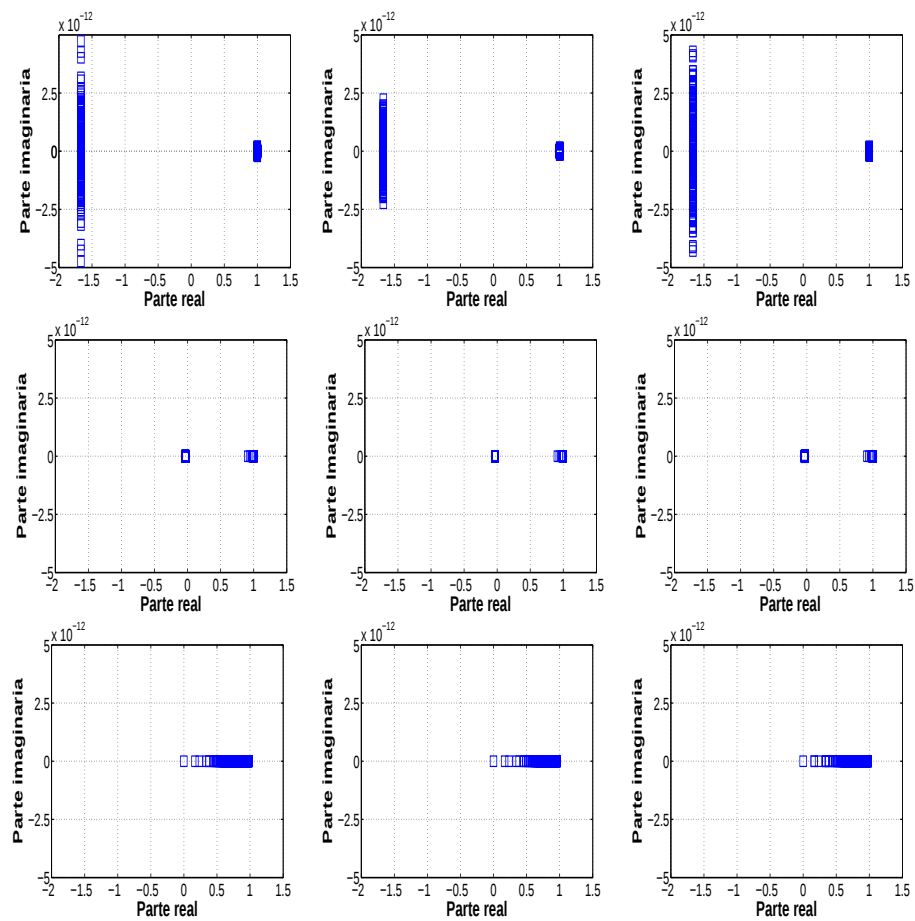


Figura 1: Distribución de valores propios $M_{\alpha}^{-1}\mathcal{A}$; por fila $\alpha = 0.01, 1, 100$, por columna ζ_0, ζ_1 y ζ_2 .

5 Resultados

En esta sección se realizan una serie de experimentos numéricos para validar la técnica del preconditionador desplazado utilizando como discretización espacial el método LDG. Se considera únicamente el caso real. Puesto que el objetivo principal es estudiar la escalabilidad de dicho preconditionador se estudiará el número de iteraciones en función de los parámetros de la malla y del grado de aproximación.

La generación de mallas se realiza de la siguiente manera. La malla m_i se obtiene dividiendo uniformemente el dominio Ω en pequeños cubos cuyos lados tienen una longitud h_i ; luego cada uno de estos cubos se divide en 5 tetraedros. Para generar la malla m_{i+1} se procede de manera análoga pero $h_{i+1} = h_i/2$. De esta forma se tiene un mejor control de los parámetros de la malla: diámetro máximo de la celdas y ángulos, los cuales pueden el condicionamiento espectral de la matriz de rigidez.

El número de celdas y densidad de la matriz de rigidez (número de bloques distintos del bloque nulo) de grados de libertad son mostrados en la Tabla 1. Además, se consideran tres variantes para el parámetro ζ . En la tabla se muestra la densidad en el número de bloques no nulos del complemento de Schur, la cual es independiente del grado de aproximación utilizado. Los experimentos se realizan con grado de aproximación uniforme por lo que el número total de grados de libertad se obtiene multiplicando el número de celdas por la dimensión del espacio local $\mathbb{P}_p^3(T)$. Por ejemplo $\times 12$ para $p = 1$, $\times 30$ para $p = 2$, etc.

Tabla 1: Descripción de las mallas y densidad del complemento de Schur.

Malla	Número de celdas	nnz		
		ζ_0	ζ_1	ζ_2
m_1	40	368	260	200
m_2	320	3760	2392	1960
m_3	2560	33632	20528	17264
m_4	20480	283840	170080	144736
m_5	163840	2331008	1384640	1184960

Debido a su buen desempeño, se prefirió el método iterativo BiCG-Stab [16] en lugar de otros métodos iterativos para matrices no simétricas, tales como GMRES, QMR, MINRES, etc [30]. Cada iteración del método BiCG-Stab preconditionado requiere de la solución de dos sistemas lineales simétricos positivos definidos de la forma

$$Mu = v.$$

Estos a su vez, se resuelven de manera iterativa mediante el método de Gradiente Conjugado Precondicionado (GCP) con una tolerancia relativa la cual se denotará por τ_i . Como preconditionador para este sistema auxiliar se utilizó simplemente una iteración de la versión por bloques de Jacobi y Gauss-Seidel simétrico. La principal razón del uso de estos preconditionadores es debido a restricciones de memoria en el sistema de cómputo que se usó para realizar los cálculos: Laptop marca Dell con un procesador quad-core i7 y 32 Gb de memoria RAM. Otros preconditionadores necesitarían el almacenamiento de 3 matrices en cambio nuestra implementación solamente requiere 2 más la inversa de la diagonal principal (por bloques).

5.1 Escalabilidad

En esta sección se estudia la escalabilidad del preconditionador utilizando un problema con solución polinomial y tensores de permeabilidad magnética y permitividad eléctrica constantes en todo el dominio.

5.1.1 Aproximaciones de bajo orden

En la Tabla 2 se muestra el desempeño del preconditionador M_α , con $\alpha = 1 - \omega^2$ para diferentes frecuencias y para las tres diferentes opciones del parámetro ζ . La escalabilidad se refleja en el número de iteraciones I_o que necesitó el método BiCG-stab para alcanzar una tolerancia $\tau_o = 10^{-13}$. Nótese que este se mantiene constante (o por lo menos aumenta levemente) al incrementar el número de celdas en la malla; además, es independiente de la frecuencia y del parámetro ζ .

Para este experimento el problema auxiliar se resuelve casi de manera exacta, utilizando el método GCP con una tolerancia $\tau_i = 10^{-13}$ y un preconditionador de tipo Jacobi por bloques. En la misma tabla se muestra el número promedio de iteraciones, I_i , al efectuar un paso de preconditionamiento. El aumento de I_i con respecto al tamaño del problema se debe al pobre efecto que tiene el preconditionador de tipo Jacobi.

Debido a que la matriz del problema auxiliar es simétrica definida positiva otras técnicas de preconditionamiento son posibles; por ejemplo, en [31] se realizó un estudio numérico de factorizaciones incompletas de Cholesky $IC(l, \tau, m)$ la cual podría utilizarse para problemas pequeños, sin embargo esta técnica no es escalable y tiene la desventaja de no ser robusta, es decir, dicha factorización no siempre existe. Otra alternativa que estamos actualmente investigando es la algebraica de múltiples niveles, la cual ha sido ampliamente utilizada, por su buen desempeño y escalabilidad en operadores del tipo *div-grad*. Sin embargo

esta debe ser cuidadosamente adaptada al operador rotacional, ver por ejemplo [29] para discretizaciones conformes en el espacio $H(\text{curl})$.

Tabla 2: Desempeño para grado $p = 1$ y ζ_0 , ζ_1 y ζ_2 .

Malla	$\omega = \frac{1}{4}$			$\omega = \frac{1}{8}$			$\omega = 0$			
	I_o	I_i	T (seg)	I_o	I_i	T (seg)	I_o	I_i	T (seg)	
ζ_0	m_2	3	225	2.4e+00	3	259	2.5e+00	3	285	2.5e+00
	m_3	3	489	5.5e+01	3	521	5.5e+01	3	553	5.7e+01
	m_4	3	932	9.8e+02	3	1115	9.9e+02	3	1328	1.0e+03
	m_5	4	1751	2.5e+04	4	2091	2.6e+04	4	2369	2.7e+04
ζ_1	m_2	4	489	3.9e+00	4	517	4.0e+00	4	561	4.0e+00
	m_3	3	909	6.1e+01	3	942	6.2e+01	3	971	6.4e+01
	m_4	4	1790	1.6e+03	4	2013	1.6e+03	4	2375	1.7e+03
	m_5	4	3588	2.7e+04	4	4184	2.7e+04	4	4791	2.8e+04
ζ_2	m_2	4	532	3.4e+00	4	576	3.5e+00	4	614	3.6e+00
	m_3	3	1116	6.0e+01	3	1279	6.2e+01	3	1314	6.3e+01
	m_4	4	2104	1.6e+03	3	2318	1.1e+03	3	2107	1.1e+03
	m_5	4	4389	2.6e+04	4	4405	2.6e+04	4	4419	2.6e+04

5.1.2 Aproximaciones de alto orden

En este ejemplo se verifica la escalabilidad del preconditionador para aproximaciones de alto orden.

Tabla 3: Número iteraciones para $\omega = \frac{1}{4}$ y grado $p = 2$.

Dimensión global	ζ_0		ζ_1		ζ_2	
	I_o	I_i	I_o	I_i	I_o	I_i
1200	4	313	4	260	4	554
9600	3	704	3	1155	3	1339
76800	3	1459	3	2373	3	2710
614400	5	2692	4	5299	5	5046

En la Tabla 3, se muestra el comportamiento del preconditionador desplazado para aproximaciones con polinomios de grado $p = 2$. Obsérvese que el número de iteraciones exteriores no depende ni del patrón de la matriz, ni del número de celdas de la malla.

Con el fin de obtener una idea de la eficiencia del preconditionador, se calculó el cociente $c = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$, para la matriz, A , del sistema sin

Tabla 4: Número de iteraciones para $\omega = \frac{1}{4}$ y grado $p = 3$.

dimensión global	ζ_0		ζ_1		ζ_2	
	I_o	I_i	I_o	I_i	I_o	I_i
2400	4	552	4	808	4	937
19200	3	1053	3	1595	3	1869
153600	3	2260	4	3662	5	3678

precondicionar y para la matriz del sistema precondicionado, $M_\alpha^{-1}A$; para distintas mallas, m_1 , m_2 y m_3 , y diferentes grado de aproximación, $p = 1, 2$ y 3 . Los resultados obtenidos en la Tabla 5, muestran un comportamiento asintótico de orden $\mathcal{O}(h^{-2})$ para A ; y de orden $\mathcal{O}(1)$ para la matriz $M_\alpha^{-1}A$, lo cual demuestra, numéricamente, la escalabilidad del preconditionador desplazado para problemas de baja frecuencia. **NA** significa que no se pudo realizar el cálculo debido a las limitaciones de memoria de nuestro equipo.

Cabe resaltar que el análisis y experimentos numéricos realizados en [19, 20] mostraron que esta técnica de desplazamiento, aplicada al operador Laplaciano y altas frecuencias, no es escalable; por lo que se debe esperar un comportamiento similar para la ecuación vectorial de Helmholtz.

Tabla 5: Cociente $c = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ para A y $M_\alpha^{-1}A$.

malla	$p = 1$		$p = 2$		$p = 3$	
	$c(A)$	$c(M_\alpha^{-1}A)$	$c(A)$	$c(M_\alpha^{-1}A)$	$c(A)$	$c(M_\alpha^{-1}A)$
m_1	7.32e+4	15.98	7.32e+5	14.99	2.77e+6	14.99
m_2	3.99e+5	15.99	3.58e+6	14.99	1.21e+7	14.99
m_3	1.60e+6	15.99	NA	NA	NA	NA

5.2 Sensibilidad en la precisión del problema auxiliar

Con el propósito de reducir el tiempo de ejecución, se realiza un estudio de sensibilidad con respecto a la precisión al resolver el sistema auxiliar. En la Tabla 6 se muestra el número de iteraciones interiores I_i para resolver el problema auxiliar con distintas tolerancias τ_i en una malla fija. Se considera $\omega = \frac{1}{4}$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ y grado de aproximación $p = 1$. El problema auxiliar se resuelve con el método GCP y se utiliza como preconditionador una iteración de los métodos Jacobi y Gauss-Seidel simétrico en su versión de bloques. Obsérvese que no es necesario resolver de manera exacta el problema auxiliar. En este cálculo se ha resaltado el valor de τ_i para el cual el número de iteraciones I_o se mantiene en 5.

Tabla 6: Variación de la tolerancia del problema auxiliar.

τ_i	Jacobi						Gauss-Seidel					
	ζ_0		ζ_1		ζ_2		ζ_0		ζ_1		ζ_2	
	I_o	I_i	I_o	I_i	I_o	I_i	I_o	I_i	I_o	I_i	I_o	I_i
1.0e-13	3	1453	4	2414	4	2955	3	685	4	1143	4	1218
1.0e-10	4	1221	4	1874	4	2234	4	593	4	895	4	971
1.0e-08	5	854	5	1136	5	1585	5	425	5	578	5	709
1.0e-06	5	595	5	777	5	1057	5	275	5	409	5	477
1.0e-05	5	529	5	617	5	809	5	240	5	340	5	391
1.0e-04	5	495	7	500	8	709	7	158	6	332	7	316
1.0e-03	13	326	18	486	17	451	20	140	19	325	15	303

En la Tabla 7 se muestra el número de iteraciones total para resolver el sistema no preconditionado y el tiempo de ejecución. La discretización se hizo para grado de aproximación $p = 1$ y $\omega = \frac{1}{4}$. Obsérvese que el número de iteraciones aumenta a medida que el número de celdas aumenta, a diferencia del sistema preconditionado, en el cual permanece constante y es mucho menor. Por otro lado, se observa que el tiempo de ejecución es menor para el sistema preconditionado. Es importante resaltar que los tiempos de ejecución del sistema preconditionado pueden mejorarse en la medida que se resuelva de manera más eficiente el sistema auxiliar. Para este se podría adaptar alguna de las técnicas mencionadas por ejemplo en [24, 29].

Tabla 7: Comparación del sistema no preconditionado y preconditionado.

Malla	ζ_0		ζ_1		ζ_2	
	I_o	T(seg)	I_o	T(seg)	I_o	T(seg)
m_3	1544	2.8×10^1	1116	3.5×10^1	1813	2.7×10^1
m_4	2805	4.6×10^2	1875	5.2×10^2	3092	4.2×10^2
m_5	4805	3.8×10^4	3180	4.9×10^4	5156	3.6×10^4
m_3	5	2.2×10^1	5	2.0×10^1	5	2.1×10^1
m_4	5	3.4×10^2	5	3.2×10^2	5	3.6×10^2
m_5	5	5.5×10^3	5	5.0×10^3	5	5.9×10^3

5.3 Coeficientes discontinuos

Finalmente se explora el rendimiento del preconditionador para problemas con coeficientes discontinuos. Este tipo de problemas surgen comúnmente al

considerar situaciones donde se tienen distintos materiales. Desde el punto de vista computacional estos son los problemas más difíciles de precondicionar.

En la Figura 2 se muestra una partición del cubo unitario en dos subregiones. En cada una de ellas se define un valor distinto de la permitividad eléctrica ε y permeabilidad constante $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Los valores de ε_2 en la región sombreada se muestran en la Tabla 8, para los demás octantes se considera $\varepsilon_1 = 1$.

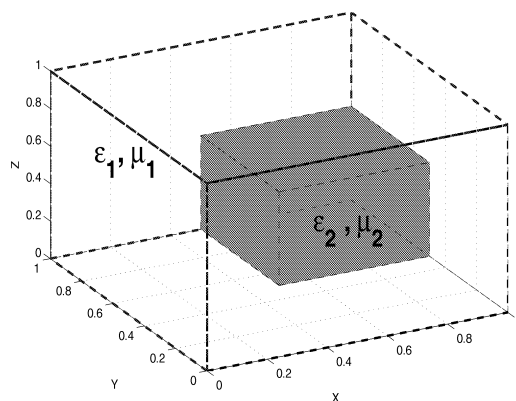


Figura 2: Descripción de la geometría para materiales discontinuos.

En la Tabla 9 se muestra la sensibilidad del sistema al usar coeficientes discontinuos en la permeabilidad magnética y permitividad constante $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Se calculó el número de iteraciones exteriores para 2 materiales en el cubo unitario, con $\mu_1 = 1$; el valor de μ_2 es el que se muestra en la tabla correspondiente.

En ambas tablas se observa que la escalabilidad del preconditionador no es afectada por la variación del salto en los coeficientes de la permeabilidad magnética y permitividad eléctrica. Para valores donde la $\varepsilon \gg 1$, es necesario realizar un mayor número de iteraciones exteriores.

En las Figuras 3 y 4, se muestra el número promedio de iteraciones interiores I_i para un problema con permeabilidad magnética constante $\mu_1 = \mu_2 = 1$ y permitividad discontinua; con $\varepsilon_1 = 1$ y distintos valores de ε_2 ; y para un problema de permeabilidad discontinua, con $\mu_1 = 1$, y distintos valores de μ_2 y permitividad eléctrica constante $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$; respectivamente. En ambos casos el comportamiento es similar. El aumento en el número de iteraciones es debido a que no se cuenta con un buen preconditionador para el sistema auxiliar. El nuevo desafío es lograr reducir el número de iteraciones interiores y al mismo tiempo reducir el tiempo de ejecución.

Tabla 8: Número de iteraciones exteriores para permitividad eléctrica ε discontinua; $\varepsilon_1 = 1$ y distintos valores de ε_2 ; y permeabilidad magnética constante $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Malla		ε_2						
		10^{-8}	10^{-4}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2
ζ_0	m_2	6	6	6	5	3	7	15
	m_3	6	6	6	6	3	8	15
	m_4	6	6	6	5	3	7	15
	m_5	6	5	6	5	3	7	15
ζ_1	m_2	7	6	6	6	4	9	15
	m_3	6	6	6	6	4	9	16
	m_4	6	5	6	6	4	9	16
	m_5	6	5	6	5	3	8	19
ζ_2	m_2	6	6	6	6	4	9	16
	m_3	6	6	6	6	4	9	15
	m_4	6	5	6	6	3	9	16
	m_5	6	5	5	5	3	9	16

Tabla 9: Número de iteraciones exteriores para permeabilidad magnética μ discontinua; $\mu_1 = 1$ y distintos valores de μ_2 ; y permitividad eléctrica constante $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$.

Malla		μ_2							
		10^{-8}	10^{-4}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^4
ζ_0	m_2	6	4	4	4	3	5	7	9
	m_3	6	4	4	4	3	5	9	9
	m_4	6	4	4	4	3	5	8	8
	m_5	6	4	4	4	3	5	8	8
ζ_1	m_2	5	4	4	4	4	9	9	9
	m_3	6	4	5	4	4	9	10	9
	m_4	6	4	4	4	4	9	10	10
	m_5	6	4	4	4	3	8	10	10
ζ_2	m_2	6	4	4	4	4	6	8	9
	m_3	6	4	4	5	4	6	10	8
	m_4	6	4	4	4	3	5	8	8
	m_5	6	4	4	4	3	5	8	8

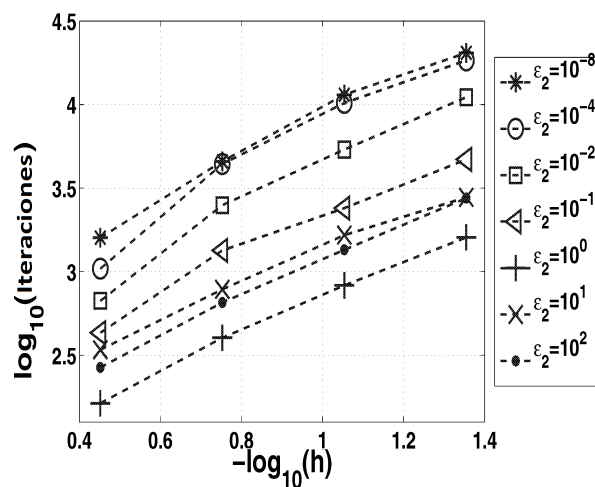


Figura 3: Número de iteraciones interiores promedio, I_i , para coeficientes discontinuos en la permitividad, con $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

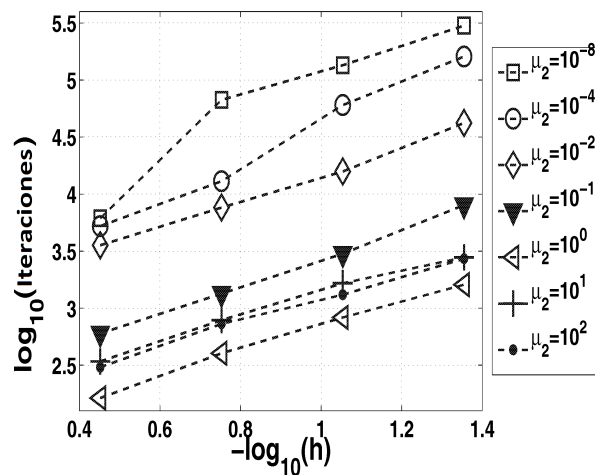


Figura 4: Número de iteraciones interiores promedio, I_i , para coeficientes discontinuos en la permeabilidad, con $\mu_1 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$.

6 Discusión

Los experimentos numéricos presentados en este artículo muestran que la técnica de preconditionamiento desplazado es también escalable para discretizaciones espaciales discontinuas de alto orden aplicadas a la ecuación vectorial de Helmholtz en el caso de bajas frecuencias. En el caso particular del método LDG, la técnica presenta un buen desempeño independientemente del grado de aproximación y de la selección del parámetro ζ . Es interesante notar que para ζ_0 ; es decir cuando se tiene mayor densidad en la matriz de rigidez, mejor condicionamiento espectral para esta matriz. Esto se deduce del bajo número de iteraciones I_i obtenidos en todos los casos.

Los experimentos muestran que para lograr una disminución sustancial en el tiempo de ejecución, el mayor esfuerzo se debe enfocar en mejorar la resolución del problema auxiliar, el cual es más ameno por tratarse de una matriz simétrica positiva definida. Para ello estamos desarrollando técnicas multiniveles como las presentadas en [11, 12] para problemas de difusión.

Referencias

- [1] Airaksinen, T.; Heikkola, E.; Pennanen, A.; Toivanen, J. (2007). “An algebraic multigrid based shifted-Laplacian preconditioner for the Helmholtz equation”, *J. Comput. Phys.* **226**(1): 1196–1210.
- [2] Alvarado, A. (2014) “Método LDG para la Ecuación Vectorial de Helmholtz”, Master’s thesis, Universidad de Puerto Rico at Mayagüez.
- [3] Alvarado, A.; Castillo, P. (2016) “Computational performance of LDG methods applied to time harmonic Maxwell equation in polyhedral domains”, *J. Scientific Computing.* **67**(2): 453–474.
- [4] Bao, G.; Wei, G.W.; Zhao, S. (2004) “Numerical solution of the Helmholtz equation with high wavenumbers”, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **59**(3): 389–408.
- [5] Bayliss, A.; Goldstein, C.; Turkel, E. (1983) “An iterative method for the Helmholtz equation”, *J. Comput. Phys.* **49**(3): 443–457.
- [6] Bermúdez, A.; Bullón, J.; Pena, F. (1998) “A finite element method for the thermoelectrical modelling of electrodes”, *Commun. Numer. Meth. Engrg.* **14**(6): 581–593.

- [7] Brenner, S.; Li, F.; Sung, L. (2006) “A locally divergence-free nonconforming finite element method for the time-harmonic Maxwell’s equations”, *Math. Comp.* **76**(258): 573–595.
- [8] Castillo, P. (2002) “Performance of discontinuous Galerkin methods for elliptic PDE’s”, *SIAM J. Sci. Comput.* **24**(2): 524–547.
- [9] Castillo, P. (2010) “Stencil reduction algorithms for the Local Discontinuous Galerkin method”, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **81**: 1475–1491.
- [10] Castillo, P.; Cockburn, B.; Perugia, I.; Schötzau, D. (2000) “An a priori error analysis of the Local Discontinuous Galerkin method for elliptic problems”, *SIAM J. Num. Anal.* **38**(5): 1676–1706.
- [11] Castillo, P.; Sequeira, F. (2013) “Computational aspects of the Local Discontinuous Galerkin method on unstructured grids in three dimensions”, *Mathematical and Computer Modelling* **57**(9–10): 2279–2288.
- [12] Castillo, P.; Velázquez, E. (2008) “A numerical study of a semi-algebraic multilevel preconditioner for the Local Discontinuous Galerkin method”, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **79**: 255–268.
- [13] Clain, S.; Rappaz, J.; Swierkosz, M.; Touzani, R. (1993) “Numerical modeling of induction heating for two-dimensional geometries”, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* **03**(06): 805–822.
- [14] Cockburn, B.; Shu, C.W. (1998) “The Local Discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems”, *SIAM J. Num. Anal.* **35**: 2440–2463.
- [15] Demkowicz, L.; Vardapetyan, L. (1998) “Modeling of electromagnetic absorption/scattering problems using hp-adaptive finite elements”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **152**(1-2): 103–124.
- [16] Van der Vorst, H.A. (1992) “Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems”, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **13**(2): 631–644.
- [17] Dolean, V.; Fol, H.; Lanteri, S.; Perrussel, R. (2008) “Solution of the time-harmonic Maxwell equations using Discontinuous Galerkin methods”, *J. Comput. Applied. Math.* **218**(2): 435–445.

- [18] El-Azab, A.; Garnich, M.; Kapoor, A. (2003) “Modeling of the electromagnetic forming of sheet metals: state-of-art an future needs”, *Journal of Materials Processing Technology* **142**(3): 744–754.
- [19] Erlangga, Y.A.; Oosterlee, C.W.; Vuik, C. (2006) “A novel multigrid based preconditioner for heterogeneous Helmholtz problems”, *SIAM J. Sci. Comput.* **27**(4): 1471–1492.
- [20] Erlangga, Y.A.; Vuik, C.; Oosterlee, C.W. (2004) “On the class of preconditioners for solving Helmholtz equation”, *Appl. Numer. Math.* **50**(3-4): 409–425.
- [21] Greif, C.; Schötzau, D. (2007) “Preconditioners for the discretized time-harmonic Maxwell equation in mixed form”, *Numerical Linear Algebra with Applications* **14**(4): 281–297.
- [22] Houston, P.; Perugia, I.; Schneebeli, A.; Schötzau, D. (2005) “Mixed Discontinuous Galerkin approximation of the Maxwell Operator: The indefinite case”, *Modél. Math. Anal. Numér.* **39**(4): 727–753.
- [23] Houston, P.; Perugia, I.; Schneebeli, A.; Schötzau, D. (2005) “Interior penalty method for the indefinite time-harmonic Maxwell’s equations”, *Numer. Math.* **100**(3): 485–518.
- [24] Li, D.; Greif, C.; Schötzau, D. (2012) “Parallel numerical solution of the time-harmonic Maxwell equations in mixed form”, *Numerical Linear Algebra with Applications* **19**(3): 525–539.
- [25] Maxwell, J.C. (1865) “A dynamical theory of the electromagnetic field”, *Phil. Trans. Royal Society Lond.* **155**: 459–512.
- [26] Maxwell, J.C. (1873) *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Clarendon Press, Oxford.
- [27] Perugia, I.; Schötzau, D. (2003) “The hp -local discontinuous Galerkin method for low-frecuency time-harmonic Maxwell’s equations”, *Math. Comp.* **72**(243): 1179–1214.
- [28] Perugia, I.; Schötzau, D.; Monk, P. (2002) “Stabilized interior penalty methods for the time-harmonic Maxwell’s equations”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **191**(41-42): 4675–4697.

- [29] Reitzinger, S.; Schöberl, J. (2002) “An algebraic multigrid method for finite element discretizations with edge elements”, *Numer. Linear Algebra with Applications* **9**(3): 223–238.
- [30] Saad, Y. (2001) *Iterative Methods for Large Sparse Linear Systems*, Second edition. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia PA.
- [31] Theran, C. (2014) “Factorización incompleta $IC(l, \tau, m)$ por bloques para matrices generadas por métodos Local Discontinuous Galerkin”. Master’s thesis, Universidad de Puerto Rico at Mayagüez.
- [32] Tuncer, E.; Lee, B.T.; Islam, M.S.; Neikirk, D.P. (1994) “Quasi-static conductor loss calculations in transmission lines using a new conformal mapping technique”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. **42**(9): 1807–1815.
- [33] Zienkiewicz, O. (2000) “Achievements and some unsolved problems of the finite element method”, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **47**(1-3): 9–28.