

OBJETOS K-FINITOS Y DECIDIBILIDAD

K-FINITE OBJECTS AND DECIDABILITY

OSVALDO ACUÑA ORTEGA*

*Received: 06/Aug/2013; Revised: 25/Oct/2013;
Accepted: 30/Oct/2013*

*CIMPA & Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.

Abstract

We study the k-finite and decidable objects in an elementary topos. We prove some results concerning k-finite and decidable objects.

Keywords: Topoi, k-finite objects, decidability.

Resumen

Se estudian los conceptos de objetos k-finitos y el concepto de objeto decidable en un topos elemental. Se prueban algunos resultados sobre objetos k-finitos y objetos decidibles.

Palabras clave: Topos, objetos k-finitos, decidibilidad.

Mathematics Subject Classification: 03G30, 18B25.

1 Introducción

En este trabajo se establecen algunos resultados sobre los conceptos de objetos K-finitos y objetos decidibles en un topos elemental arbitrario. También se considera que un objeto es finito en un topos elemental si es a la vez k-finito y decidable, y se demuestra que este concepto resulta adecuado para definir el concepto de finitud en un topos elemental. De esta forma extendemos los resultados estudiados en [3] y [4]. La teoría que fundamenta estos estudios se puede consultar en [1], [2] y [5].

2 Resultado Principal

Sea ε un topos elemental y $X \in |\varepsilon|$, se dice que X es k-finito si $\ulcorner X \urcorner : 1 \rightarrow \Omega^X$ se factoriza a través de $k(X)$, donde $k(X)$ es el subobjeto más pequeño de Ω^X cerrado bajo uniones binarias que contiene a $\{\}_X : X \rightarrow \Omega^X$ y $\ulcorner \phi \urcorner : 1 \rightarrow \Omega^X$. Observe que $\ulcorner X \urcorner : 1 \rightarrow \Omega^X$ corresponde a flecha $id_X : X \rightarrow X$, $\{\}_X : X \rightarrow \Omega^X$ corresponde a $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$ tal que $pr_i \circ \Delta_X = id_X$ y $\ulcorner \phi \urcorner : 1 \rightarrow \Omega^X$ corresponde a la flecha $\phi \rightarrow X$ donde ϕ es el objeto vacío de ε .

Teorema 1 Sea $X \in |\varepsilon|$, X es k-finito si y solo si $2^X \subseteq k(X)$.

Demostración. (\Leftarrow) Como X está completamentado en X , $\ulcorner X \urcorner : 1 \rightarrow \Omega^X$ se factoriza a través de 2^X y entonces se factoriza a través de $k(X)$.

(\Rightarrow) Antes de probar esta parte repasemos algunas definiciones. Defina $2^{(-)} : \Omega^X \rightarrow \Omega^{\Omega^X}$ por $\models 2^x = \{\bar{y} \in \Omega^X / \exists y \in \Omega^X (y \cup \bar{y} = x \wedge y \cap \bar{y} = \emptyset)\}$ donde

\cup, \cap son la unión y la intersección binaria de la algebra de Heyting Ω^X . Define $k : \Omega^X \rightarrow \Omega^{k(X)} \rightarrow \Omega^{\Omega^X}$ como $\models k(X) = \{y \in k(X) / y \subseteq x\}$. Como la noción de k-finitos es absoluta, $k(X)$ representa el conjunto de subconjuntos finitos de x , donde x es una variable de tipo Ω^X .

Defina el objeto Q_X como $\{x \in \Omega^X / 2^x \subseteq k(X)\} \rightarrow \Omega^x$. Si probamos que $k(X) \subseteq Q_X$ entonces tenemos que $2^{\ulcorner X \urcorner} \subseteq k(\ulcorner X \urcorner)$ y entonces $2^X \subseteq k(X)$.

(i) $\ulcorner \phi \urcorner : 1 \rightarrow \Omega^X$ se factoriza a través de Q_X .

Claramente $\models 2^{\ulcorner \phi \urcorner} = \{\phi\}$, como ϕ es k-finito,

$$\ulcorner \phi \urcorner \in k(\ulcorner X \urcorner), \phi \subseteq \ulcorner \phi \urcorner$$

por lo tanto $\ulcorner \phi \urcorner \in Q_X$.

(ii) $\{\}_X : X \rightarrow \Omega^X$ se factoriza a través de Q_X .

Sabemos que

$$\models 2^{\{x\}} = \{\bar{y} \in \Omega^X / \exists y (y \cup \bar{y} = \{x\} \wedge y \cap \bar{y} = \phi)\}.$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \models y \cap \bar{y} = \phi \wedge y \cup \bar{y} = \{x\} \\ \Rightarrow (x \in y \vee x \in \bar{y}) \vee (y \subseteq \{x\} \wedge \bar{y} \subseteq \{x\}) \wedge y \cap \bar{y} = \phi \\ \Rightarrow (\{x\} \subseteq y \vee \{x\} \subseteq \bar{y}) \wedge (y \subseteq \{x\} \wedge \bar{y} \subseteq \{x\}) \wedge y \cap \bar{y} = \phi \\ \Rightarrow (y = \{x\} \wedge \bar{y} \subseteq \{x\} \wedge \bar{y} \cap \{x\} = \phi) \vee \\ (\bar{y} = \{x\} \wedge y \subseteq \{x\} \wedge y \cap \{x\} = \phi) \\ \Rightarrow (\{x\} = y \wedge \bar{y} = \phi) \vee (\{x\} = \bar{y} \wedge y = \phi) \\ \Rightarrow \{x\} = y \vee y = \phi. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\models \exists \bar{y} (y \cup \bar{y} = \{x\} \wedge y \cap \bar{y} = \phi) \Leftrightarrow \{x\} = y \vee y = \phi,$$

el recíproco es trivial y entonces

$$\models 2^{\{x\}} = \{y \in \Omega^X / y = \{x\} \vee y = \phi\}$$

pero

$$\models \{y \in \Omega^X / y = \{x\} \vee y = \phi\} \subseteq k(\{x\})$$

y

$$\models 2^{\{x\}} \subseteq k(\{x\}).$$

Por lo tanto $\{\}_X$ se factoriza a través de Q_X .

(iii) Q_X es cerrado bajo uniones binarias.

$$\begin{aligned}
& \models x \in Q_X \wedge \bar{x} \in Q_X \wedge y \in 2^{x \cup \bar{x}} \\
& \Rightarrow \exists z (y \cup z = x \cup \bar{x} \wedge y \cap z = \phi) \wedge x \in Q_X \wedge \bar{x} \in Q_X \\
& \Rightarrow \exists z (x \subseteq y \cup z \wedge y \cap z = \phi \wedge \bar{x} \subseteq y \cup z) \wedge \\
& \quad x \in Q_X \wedge \bar{x} \in Q_X \wedge y = (y \cap \bar{x}) \cup (y \cap x) \\
& \Rightarrow \exists z (x = (y \cap x) \cup (x \cap z) \wedge y \cap z = \phi \wedge \bar{x} = (y \cap \bar{x}) \cup (z \cap \bar{x})) \wedge \\
& \quad x \in Q_X \wedge \bar{x} \in Q_X \wedge y = (y \cap x) \cup (y \cap \bar{x}) \\
& \Rightarrow \exists z (x = (y \cap x) \cup (z \cap x) \wedge (y \cap x) \cap (z \cap x) = \phi) \wedge x \in Q_X \wedge \\
& \quad y = (y \cap x) \cup (y \cap \bar{x}) \\
& \quad \wedge \exists z (\bar{x} = (y \cap \bar{x}) \cup (z \cap \bar{x}) \wedge (y \cap \bar{x}) \cap (z \cap \bar{x}) = \phi) \wedge \bar{x} \in Q_X \\
& \Rightarrow y \cap x \in 2^x \wedge y \cap \bar{x} \in 2^{\bar{x}} \wedge x \in Q_X \wedge \bar{x} \in Q_X \wedge \\
& \quad y = (y \cap x) \cup (y \cap \bar{x}) \\
& \Rightarrow y \cap x \in 2^x \wedge y \cap \bar{x} \in 2^{\bar{x}} \wedge 2^x \in k(X) \wedge 2^{\bar{x}} \in k(\bar{x}) \wedge \\
& \quad y = (y \cap x) \cup (y \cap \bar{x}) \\
& \Rightarrow y \cap x \in k(X) \wedge y \cap \bar{x} \in k(\bar{x}) \wedge y = (y \cap x) \cup (y \cap \bar{x}) \\
& \Rightarrow y \cap x \in k(X) \wedge y \cap \bar{x} \in k(\bar{x}) \wedge y = (y \cap x) \cup (y \cap \bar{x}) \\
& \Rightarrow y \in k(X) \wedge y \subseteq x \cup \bar{x} \\
& \Rightarrow y \in k(x \cup \bar{x}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\models x \in Q_X \wedge \bar{x} \in Q_X \wedge y \in 2^{x \cup \bar{x}} \Rightarrow y \in k(x \cup \bar{x})$$

si y solo si

$$\models x \in Q_X \wedge \bar{x} \in Q_X \Rightarrow (y \in 2^{x \cup \bar{x}} \Rightarrow y \in k(x \cup \bar{x}))$$

y esto implica

$$\models x \in Q_X \wedge \bar{x} \in Q_X \Rightarrow \forall y (y \in 2^{x \cup \bar{x}} \Rightarrow y \in k(x \cup \bar{x})).$$

Por lo tanto

$$\models x \in Q_X \wedge \bar{x} \in Q_X \Rightarrow x \cup \bar{x} \in Q_X.$$

Entonces Q_X es cerrado bajo uniones binarias, y entonces (i),(ii), (iii) implican $k(X) \subseteq Q_X$, como X es k -finito se tiene que $\lceil X \rceil \in k(X)$ lo que implica que $\lceil X \rceil \in Q_X$ y entonces $2^X \subseteq k(X)$, probándose el teorema. ■

Corolario 2 Si X' es un subobjeto complementado de un objeto k -finito X , entonces X' es k -finito.

Demostración. $\lceil X \rceil$ se factoriza a través de 2^X y $2^X \subseteq k(X)$. ■

3 Consecuencias

Proposición 3 Para $X \in |E|$, el álgebra booleana 2^X actúa en $k(X)$ a través de la restricción de \cap en $k(X) \times 2^X$.

Demostración. Queremos probar que $k(X) \times 2^X \xrightarrow{\gamma} \Omega^X \times \Omega^X \xrightarrow{\cap} \Omega^X$ se factoriza a través de $k(X)$:

$$\begin{aligned} \models r \in k(X) \wedge y \in 2^X \\ \Rightarrow \exists_y (z \cup y = X \wedge z \cap y = \phi) \wedge r \in k(X) \\ \Rightarrow \exists_y (r = (r \cap z) \cup (r \cap y)) \wedge (r \cap z) \cap (r \cap y) = \phi \wedge r \in k(X) \\ \Rightarrow r \cap y \in 2^r \wedge r \in k(X) \\ \Rightarrow r \cap y \in 2^r \wedge 2^r \subseteq k(r), \text{ como } k(X) \subseteq Q_X, \\ \Rightarrow r \cap y \in k(r) \\ \Rightarrow r \cap y \in k(X). \end{aligned}$$

Sea $k^+(X)$ el más pequeño subobjeto de Ω^X cerrado bajo uniones binarias y que contiene a $\{\cdot\}_X$. Observe que $k^+(X) \subseteq k(X)$, denote esta inclusión por (i). ■

Proposición 4 Para cualquier $X \in |E|$, $(i, \phi) : k^+(X) + 1 \rightarrow k(X)$ es un isomorfismo.

Demostración. Para $X \in |E|$ denote $w_X : X \rightarrow 1$ el único morfismo existente que va de X a 1. Defina P como el producto fibrado siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^X & \xrightarrow{\exists_{w_X}} & \Omega \\ \uparrow & & \uparrow t \\ P & \xrightarrow{\omega_P} & 1 \end{array}$$

P contiene a $\{\cdot\}_X$ dado que es una transformación natural, entonces $\{\cdot\} \circ \exists_{w_X} = \omega_X \circ t$,

$$\begin{array}{ccc} \Omega^X & \xrightarrow{\exists_{w_X}} & \Omega \\ \uparrow & & \uparrow t \\ P \times P & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

conmuta. Como $t \vee t = t$ y \exists_{w_X} preserva uniones binarias P es cerrado bajo uniones binarias. Por definición de $k^+(X)$, $k^+(X) \subseteq P$ ya que P es un monoide

que contiene a $\{\cdot\}$. Claramente $\lceil \phi^\top \cap P = \phi$ por lo tanto $k^+(X) \cap \phi = \phi$ y entonces $(i, \phi) : k^+(X) + 1 \rightarrow k(X)$ es mónica y entonces $k^+(X) + 1 \subseteq k(X)$.

Por otro lado $k^+(X) + 1$ es cerrado bajo uniones binarias:

$$\begin{aligned} & \models (x \in k^+(X) \vee x = \phi) \wedge (y \in k^+(X) \vee y = \phi) \\ & \Rightarrow x \cup y \in k^+(X) \vee x \cup y = x \vee x \cup y = y \vee x \cup y = \phi \\ & \Rightarrow x \cup y \in k^+(X) \vee x \cup y \in k^+(X) \vee x \cup y \in k^+(X) \vee x \cup y = \phi \\ & \Rightarrow x \cup y \in k^+(X) \vee x \cup y = \phi. \end{aligned}$$

$k^+(X) + 1$ contiene $\{\cdot\}_X$ y ϕ , por lo tanto $k(X) = k^+(X) + 1$. ■

Teorema 5 Para cualquier objeto $X \in |E|$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El subobjeto diagonal $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$ tiene complemento.
2. $\models \forall x, y \in X \times X \Rightarrow x = y \vee \neg(x = y)$.
3. La flecha de clasificadora X_{Δ_X} se factoriza a través de $(t, f) : 2 \rightarrow \Omega$.
4. La flecha $\{\cdot\}_X : X \rightarrow \Omega_X$ se factoriza a través de 2^X .
5. $k(X) \subseteq 2^X$.
6. El gráfico $\Gamma_f : Y \rightarrow Y \times X$ para cada $f : Y \rightarrow X$ es un subobjeto complementado de $Y \times X$.
7. Gráfico $: X^Y \rightarrow \Omega^{Y \times X}$ se factoriza a través de $(t, f)^Y : 2^Y \rightarrow \Omega^{Y \times X}$ para todo Y .

Demostración.

- (1) \Rightarrow (2) Como $\llbracket x = y \rrbracket = \Delta_X$ y el complemento de Δ_X es $\neg \Delta_X$.
- Para ver que (2) \Rightarrow (1), observe que $\llbracket x = y \rrbracket \cup \llbracket \neg(x = y) \rrbracket = X \times X$, pero $\llbracket x = y \rrbracket \cap \llbracket \neg(x = y) \rrbracket = \phi$, entonces Δ_X es complementado.
- (1) \Leftrightarrow (3) $(t, f) : 2 \rightarrow \Omega$ clasifica subobjetos complementados.
- (3) \Leftrightarrow (4) X_{Δ_X} se factoriza a través de 2 y por lo tanto su adjunto exponencial $\{\cdot\}_X$ se factoriza a través de $(t, t)^X : 2^X \rightarrow \Omega^X$ y reciprocamente.
- (4) \Rightarrow (5) 2^X es un subretículo de Ω^X y entonces $0 \rightarrow 1$ está complementado y entonces $\lceil \phi^\top : 1 \rightarrow \Omega^X$ se factoriza a través de $(t, f)^X : 2^X \rightarrow \Omega^X$ y por (4) $\{\cdot\}_X$ está contenido en 2^X y así $k(X) \subseteq 2^X$.

- (5) \Rightarrow (4) Si $k(X) \subseteq 2^X$ entonces $\{\cdot\}_X$ se factoriza a través de 2^X .
- (6) \Rightarrow (1) El gráfico de $id_X : X \rightarrow X$ es la diagonal de X .
- (1) \Rightarrow (6) El gráfico de cualquier flecha $f : Y \rightarrow X$ está definida por el siguiente producto fibrado.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \Gamma_f \downarrow & & \downarrow \Delta_X \\ X \times Y & \xrightarrow{X \times f} & X \times X \end{array}$$

Como Δ_X está completamente en $X \times X$, también Γ_f está completamente en $X \times Y$.

- Antes de probar (7) \Leftrightarrow (4), probaremos la siguiente situación general: si X, Y son objetos arbitrarios de $|E|$ entonces

$$\begin{array}{ccc} X^Y & \xrightarrow{Graf} & \Omega^{Y \times X} \\ \{\cdot\}_X^Y \downarrow & & \downarrow \varphi \\ (\Omega^X)^Y & \xrightarrow{id} & (\Omega^X)^Y \end{array}$$

commuta, donde φ es dado por $\models \varphi(g) = \{(y, x) / x \in g(y)\}$:

$$\begin{aligned} \models (\varphi \circ \{\cdot\}_X^Y)(f)(y) &= \varphi(\{f\}_X(y)) \\ &= \varphi(\{f(y)\}_X) \\ &= \{(y, x) / x \in \{f(y)\}_X\} \\ &= \{(y, x) / x = f(y)\}. \end{aligned}$$

Entonces $\models (\varphi \circ \{\cdot\}_X^Y)(f) = Graf(f)$ y entonces $\varphi \circ \{\cdot\}_X^Y = Graf$.

- (7) \Rightarrow (4) $Graf : X^1 \rightarrow \Omega^{1 \times X}$ se factoriza a través $2^X \rightarrow \Omega^X$, entonces $\{\cdot\}_X^1 = \{\cdot\}_X$ se factoriza a través de 2^X .
- (4) \Rightarrow (7) $\{\cdot\}_X$ se factoriza a través de 2^X entonces $\{\cdot\}_X^Y$ se factoriza a través $2^{Y \times X}$, como $Graf = \varphi \circ \{\cdot\}_X^Y$ entonces $Graf$ se factoriza a través de $2^{Y \times X}$. ■

Decimos que X es decidible si satisface alguna de las condiciones equivalentes del teorema anterior.

Corolario 6 Si E es un topos elemental con el objeto de los números naturales \mathbb{N} entonces

- (i) $K(\mathbb{N}) \subseteq 2^{\mathbb{N}}$.
- (ii) $\forall p, p : 1 \rightarrow \mathbb{N}$ $[p]$ tiene complemento.
- (iii) $K[p] \subseteq 2^{[p]}$.

Demostración.

- (i) \mathbb{N} es decidible.
- (ii) $[p]$ es un subobjeto k -finito de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ entonces $[p]$ es decidible y por lo tanto $[p] : 1 \rightarrow \Omega^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ se factoriza a través de $2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$.
- (iii) Cualquier subobjeto de un objeto decidible es decidible, $[p] \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y entonces $K[p] \subseteq 2^{[p]}$. ■

Corolario 7 Si $X \in |E|$, X es K -finito y decidible si y solo si $K(X) = 2^X$.

Demostración. Aplique el teorema 5 y el teorema 1. ■

Proposición 8 Si X es decidible entonces $k(X)$ es un subanillo booleano de 2^X . Más aun $k(X)$ es un ideal.

Demostración. \neg_X se restringe a 2^X como el complemento. Defina

$$\vDash x - y = x \cap \neg_X(y),$$

entonces $k(X)$ es cerrado bajo $- : k(X) \times 2^X \rightarrow k(X)$. Si X es decidible entonces $k(X) \subseteq 2^X$, por lo tanto $\cap, -$ se pueden restringir a $k(X) \times k(X)$. Esto implica que $k(X)$ es cerrado bajo intersección y complemento relativo. $k(X)$ es cerrado bajo uniones binarias y tiene un elemento cero $\ulcorner \phi^\neg : 1 \rightarrow k(X)$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \vDash x - y = \ulcorner \phi^\neg &\Leftrightarrow x \cap \neg y = \ulcorner \phi^\neg \\ &\Leftrightarrow \ulcorner \phi^\neg \cup (x \cap y) = x \\ &\Leftrightarrow x \subseteq y. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\vDash y \Delta x \equiv (y - x) \cup (x - y) = \ulcorner \phi^\neg \Leftrightarrow x = y.$$

Por lo tanto Δ se convierte en la suma, \cap en el producto de $k(X)$ y $\ulcorner \phi^\neg$ el elemento neutro. La proposición 3 nos dice que $k(X)$ es un ideal de 2^X . ■

Proposición 9 Si $X \in |E|$, X decidible si y solo si $k(X)$ es decidible.

Demostración. (\Rightarrow) Por la proposición 8 sabemos que el siguiente diagrama es un producto fibrado

$$\begin{array}{ccc} k(X) & \longrightarrow & 1 \\ \Delta_{k(X)} \downarrow & & \downarrow \Gamma_{\phi^\top} \\ k(X) \times k(X) & \xrightarrow{\Delta} & k(X) \end{array}$$

donde Δ es diferencia simétrica, y como

$$k(X) = k^+(X) + 1,$$

entonces

$$\Delta_{k(X)} + \Delta^{-1}(k^+(X)) = k(X) \times k(X)$$

y así se tiene que $k(X)$ es decidible.

(\Leftarrow) $\{\cdot\}_X : X \rightarrow k(X)$ es mónica y así todo subobjeto de $k(X)$ es decidible y entonces X es decidible. ■

Corolario 10 X es K -finito decidible si y solo si 2^X es k -finito decidible.

Demostración. Por corolario 7, X es k -finito decidible si y solo si $k(X) = 2^X$, por proposición 9, 2^X es decidible y por (3) $k(X)$ es k -finito y entonces 2^X es k -finito decidible. ■

Referencias

- [1] Acuña–Ortega, O. (1977) *Finiteness in Topoi*. Ph. D. Dissertation, Wesleyan University, Middletown, CT.
- [2] Acuña–Ortega, O.; Linton, F.E.J. (1979) “Finiteness and decidability I”, in: *Applications of Sheaves*, Lecture Notes in Mathematics 753, Springer–Verlag, New York: 80–100.
- [3] Acuña–Ortega, O. (2011) “Una nota sobre objetos k -finitos en un topos Booleano con el objeto de los números naturales”, *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **19**(2): 239–245.
- [4] Acuña–Ortega, O. (2013) “Sobre una construcción de un monoide libre con identidad sobre un topos E con el objeto de los números naturales”, *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **20**(1): 79–94.

- [5] Kock, A.; Lecouturier, P.; Mikkelsen, Ch.J. (1975) “Some topos theoretic concepts of finiteness”, in: *Model Theory and Topoi*, Lecture Notes in Mathematics 445, Springer-Verlag, New York: 209–283.