Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2013 **20**(2) : 243–255
cimpa – ucr issn: 1409-2433

ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA ESTRUCTURA ORBITAL DE MODELOS DE GALAXIAS TRIAXIALES NO CUSPIDALES Y CUSPIDALES UTILIZANDO DISTINTAS EXPANSIONES PARA EL POTENCIAL GRAVITATORIO

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE ORBITAL STRUCTURE FOR NON–CUSPY AND CUSPY TRIAXIAL MODELS OF GALAXIES USING DIFFERENT EXPANSIONS OF THE GRAVITATIONAL POTENTIAL

Hugo D. Navone* Alejandra F. Zorzi†

Received: 21/Feb/2012; Revised: 27/Jun/2012;
Accepted: 12/May/2013

*Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario; Instituto de Física de Rosario (CONICET-UNR); Observatorio Astronómico Municipal de Rosario. Rosario, Argentina. E-Mail: navone@ifir-conicet.gov.ar

†Misma dirección que/*Same address as:* H. D. Navone. E-Mail: zorzi@ifir-conicet.gov.ar

Resumen

Un método para generar modelos de galaxias elípticas consiste en partir de un sistema de partículas con una configuración adecuada y seguir su evolución con un código de N-cuerpos hasta que alcanza el equilibrio. En trabajos anteriores hemos utilizado el código de L.A. Aguilar para generar modelos tanto no cuspidales como cuspidales, ofreciendo los segundos una mejor representación de las galaxias elípticas. Sin embargo, el método propuesto por Hernquist & Ostriker es más adecuado para los casos con cúspides centrales, puesto que utiliza una expansión del potencial en funciones radiales que ya tiene caracter cuspidal. Aquí consideramos dos modelos, uno no cuspidal y otro cuspidal, obtenidos con el método de Aguilar y cuyos potenciales ajustamos ahora con la expansión de Hernquist & Ostriker. Obtuvimos las ecuaciones variacionales correspondientes y las empleamos para determinar los exponentes de Lyapunov de órbitas ya estudiadas con el método de Aguilar y separar las caóticas. Las órbitas regulares las clasificamos mediante el análisis de sus frecuencias orbitales. Presentamos una comparación de los resultados obtenidos con los dos métodos para ambos tipos de órbitas.

Palabras clave: dinámica estelar, sistemas estelares triaxiales cuspidales, estructura orbital.

Abstract

One way to create models of elliptical galaxies is to start from a system of particles with a suitable distribution and to follow its evolution with an N-body code until it reaches equilibrium. In previous works we used the code of L.A. Aguilar to generate non-cuspy and cuspy models, the latter giving a better representation of elliptical galaxies. However, the method proposed by Hernquist and Ostriker is more suitable for the cases with central cusps, because it uses an expansion of the potential in radial functions that already reflects the cuspy character. Here we consider two models, one non-cuspy and another cuspy, obtained with the method of Aguilar and whose potentials we now fit with the Hernquist and Ostriker expansion. We obtained the corresponding variational equations and we used them to determine the Lyapunov exponents of orbits already investigated with the method of Aguilar and to separate the chaotic ones. We classified the regular orbits through the analysis of their orbital frequencies. Here we present a comparison of the results obtained with the two methods for both types of orbits.

Keywords: stellar dynamics, cuspy triaxial stellar systems, orbital structure.

Mathematics Subject Classification: 85-08,70F15,70F10,65P20

1 Introducción

Las galaxias se clasifican según su morfología siguiendo el esquema propuesto por Edwin Hubble en tres clases regulares generales: elípticas, lenticulares y espirales; a las que se les se agrega un cuarto agrupamiento que contiene las de aspecto irregular. En este estudio trabajaremos con galaxias elípticas. Si bien las imágenes de estos objetos sugieren que son sistemas simples, su estructura dinámica resulta sumamente rica y compleja: el caos juega un rol importante en la conformación de los sistemas triaxiales, las observaciones muestran que la mayoría de las galaxias poseen cúspides en el centro ([5],[10]) y se registran evidencias acerca de la probable existencia de agujeros negros masivos en los núcleos de muchas de ellas.

La estructura orbital de modelos autoconsistentes de sistemas estelares triaxiales creados a través de colapsos no disipativos de partículas "frías" siguiendo su evolución con el código de N-cuerpos de L.A. Aguilar [1] ha sido investigada en varios trabajos anteriores ([12], [11], [2] y [13]). El último de ellos aborda el estudio de morfologías cuspidales puesto que constituyen una mejor representación de las galaxias elípticas que los modelos de densidad central constante usados en el pasado. Sin embargo, obtener un esquema de cálculo que permita realizar esta tarea con el código de Aguilar no es simple y requiere de varios ajustes en sus diferentes fases.

El colapso inicial tiene que ser realizado usando parámetros de suavizado extremadamente bajos -elección que provoca una pobre conservación de la energía durante esta fase- y cuando se usa un valor mayor para poder realizar la subsecuente relajación del sistema sus efectos tienen que ser compensados con un potencial adicional para preservar la cúspide central [13].

El método de campo autoconsistente propuesto por Hernquist & Ostriker [7] resulta más adecuado para la obtención de modelos cuspidales a través de colapsos masivos. éste utiliza una expansión sobre funciones radiales basada en el modelo de Hernquist [6] -el cual ya es de naturaleza cuspidal- y, además, provee las ecuaciones que aproximan al potencial; mientras que en el esquema de Aguilar tal aproximación debe ser obtenida a través de la interpolación de resultados numéricos.

Ahora bien, Carpintero & Wachlin [4] mostraron que cuando se utiliza el código de Aguilar la estructura orbital resultante es diferente para

distintas aproximaciones del potencial. Tales diferencias podrían ser aún más significativas entre los resultados obtenidos con los esquemas de Aguilar y de Hernquist, puesto que las expansiones del potencial difieren en ambos métodos, usando el primero una aproximación numérica para la parte radial, mientras que en el segundo proviene de un desarrollo analítico. Por lo tanto, resulta muy importante investigar las diferencias que pueden surgir del análisis orbital obtenido a partir de ambos métodos. Para ello, hemos elegido dos de nuestros modelos previos obtenidos con el esquema de Aguilar (A), uno de ellos no cuspidal y otro cuspidal, ajustamos sus potenciales con el código de Hernquist (HO) y obtuvimos la estructura orbital regular y caótica resultante para el mismo conjunto de órbitas consideradas en trabajos anteriores. En el presente artículo se analizan los resultados obtenidos con ambos métodos sobre cada una de las morfologías estudiadas.

2 Modelos y métodos

2.1 Modelos

La simulación numérica de sistemas estelares constituye una herramienta fundamental para el estudio de su dinámica. La idea básica consiste en generar una distribución de N-cuerpos que representa al sistema en estudio, seguir su evolución integrando las ecuaciones de movimiento para, finalmente, aplicar distintas técnicas de análisis y obtener su estructura orbital.

Ahora bien, en relación a los modelos que se obtienen mediante simulación numérica, es importante destacar que se refieren a toda la materia que interactúa gravitatoriamente, ya sea visible (estrellas) o materia oscura, en tanto que los datos observacionales, salvo en casos excepcionales, sólo se refieren a la primera. Por ello, tanto Aquilano et al. [2] como Muzzio et al. [13] han usado como comparación las galaxias NGC1379 y NGC4697 que según Napolitano et al. [14] tienen gradientes nulos de relación masa-luminosidad.

Además, en los modelos computacionales de galaxias el número de cuerpos que se utilizan es mucho menor que la cantidad de estrellas presentes en los sistemas reales. Como resultado de este desajuste surgen en las simulaciones efectos de relajación colisionales apreciables que no se corresponden con lo que sucede en realidad. Para prevenir este problema se introducen potenciales suavizados que reducen drásticamente las fuerzas a corta distancia -incrementando el tiempo de relajación y reduciendo

los efectos colisionales-, mientras que a largo alcance se comportan como Newtoneanos [8]. La regulación de este efecto se realiza mediante la introducción de un parámetro de suavizado en las expresiones del potencial denominado usualmente ϵ [3].

Teniendo en cuenta esto, es posible construir modelos no cuspidales y cuspidales de galaxias siguiendo el procedimiento propuesto por Aguilar & Merrit [1]. En ambos casos se parte de la generación al azar de una distribución esférica de 10^6 partículas, con una densidad inversamente proporcional a la distancia al centro y con una distribución Gaussiana de velocidades; se deja que el sistema colapse siguiendo su evolución con el código multipolar de Aguilar y una vez que el equilibrio es alcanzado se obtiene un sistema triaxial cuya morfología depende del valor inicial de la energía cinética.

Las unidades se eligen de manera tal que la constante gravitacional G, la masa inicial y el radio del sistema sean todos iguales a 1.

Los sistemas obtenidos se caracterizan a partir de las relaciones entre sus semiejes. Siguiendo a Aguilar & Merrit [1], los semiejes se definen como la raiz cuadrada del valor cuadrático medio de las coordenadas del 80% de las partículas más ligadas; siendo a, b y c los valores de los semiejes mayor, intermedio y menor, respectivamente. Para el presente estudio se seleccionaron sistemas con una relación c/a aproximadamente igual a 0.4, que representan a galaxias tipo E6 según la clasificación de Hubble.

El modelo no cuspidal -que denominamos E6 de aquí en más- se construyó siguiendo el esquema descripto anteriormente y manteniendo fijo el parámetro de suavizado en $\epsilon = 0.010$ [2].

El modelo cuspidal (E6c) se obtuvo partiendo de un valor de energía cinética igual a la del modelo E6 pero tomando un parámetro de suavizado muy pequeño ($\epsilon = 0.0001$) para el colapso inicial, para luego dejarlo evolucionar fijando un valor mayor ($\epsilon = 0.0050$) compensado con un potencial de Schuster (o Plummer) en el centro del sistema [13].

Los modelos triaxiales seleccionados -E6 (no cuspidal) y E6c (cuspidal)- han sido caracterizados en detalle en trabajos previos y sus estructuras orbitales se obtuvieron siguiendo los esquema propuestos por Aquilano et al. [2] y Muzzio et al. [13].

En este estudio, en cambio, usamos el código facilitado gentilmente por L. Hernquist para obtener las correspondientes expansiones de los potenciales a partir de la distribución de partículas de ambos modelos, tal como proponen Hernquist & Ostriker [7].

En la Fig. 1 se representan para cada modelo las diferencias relativas

entre los potenciales calculados con cada aproximación en función del potencial relativo (esto es, del potencial dividido por su mínimo valor) calculado con la aproximación A. Es obvio que el acuerdo entre ambas aproximaciones es pobre para el modelo no cuspidal E6. Para esta morfología, las mayores discrepancias en el potencial reducido se localizan en valores cercanos a 1, esto es, cerca del centro del sistema, como podría esperarse a partir de la naturaleza cuspidal de la aproximación de Hernquist. No obstante, aún mucho más lejos del centro (valores bajos del potencial reducido) las diferencias relativas para el modelo E6 son un tanto más grandes que para el modelo E6c.

2.2 Análisis orbital

Para obtener los seis exponentes característicos de Lyapunov a tiempo finito (ECL-TF), tal como fuera realizado en investigaciones previas, en este trabajo derivamos las ecuaciones variacionales de [7] correspondientes a la expansión del potencial y las implementamos computacionalmente junto con las ecuaciones de movimiento en el procedimiento LIAMAG [16], que fuera provisto amablemente por D. Pfenniger.

Las posiciones y velocidades iniciales de los cuerpos seleccionados al azar para calcular sus órbitas fueron las mismas que se utilizaron en trabajos anteriores.

Debido a la conservación del volumen en el espacio de las fases, los seis exponentes de Lyapunov aparecen en pares, con el mismo valor absoluto pero de signo opuesto. Además, y como consecuencia de la conservación de la energía, uno de estos pares es igual a cero. Por lo tanto, existen sólo dos ECL-TFs independientes; al mayor lo denominaremos L_{max} y al siguiente más grande L_{int}.

Los exponentes de Lyapunov se definen usando un intervalo de integración infinito, pero los coeficientes que nosotros obtenemos resultan de un cálculo numérico a tiempo finito y, en consecuencia, ellos sólo pueden alcanzar un valor mínimo límite L_{lim} distinto de cero. Por lo tanto, y como ya hiciéramos en investigaciones previas, procedemos a clasificar las órbitas como regulares (R) si $L_{max} < L_{lim}$, como parcialmente caóticas (PC) si $L_{int} < L_{lim} \leq L_{max}$, y como totalmente caóticas (TC) cuando $L_{lim} \leq L_{int}$.

Realizando un relevamiento de los gráficos de ECL-TFs vs. energía de la órbita y de L_{max} vs. L_{int} es posible estimar el valor límite en $L_{lim} = 0.00180$ [13].

Las órbitas regulares se calcularon usando un código basado en el

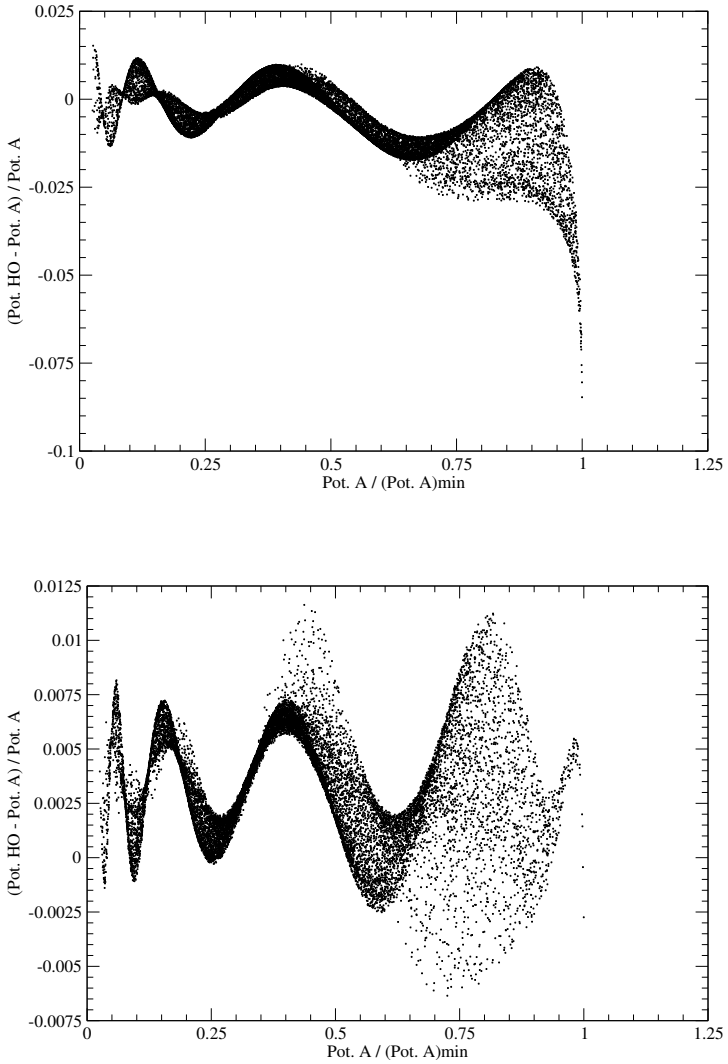

Figura 1: Diferencias relativas entre el potencial calculado con las aproximaciones A y HO para los modelos E6 (arriba) y E6c (abajo) vs. el potencial reducido de la aproximación A. Notar que las escalas verticales usadas para cada modelo son muy diferentes.

procedimiento LIAMAG. Para cada una de ellas se obtuvieron 8192 puntos equiespaciados sobre un tiempo de 300 períodos radiales y se realizó el análisis de frecuencia sobre las variables complejas $x + iu$, $y + iv$ y $z + iw$ (siendo x, y, z las coordenadas y u, v, w las correspondientes velocidades) con el propósito de obtener las frecuencias fundamentales F_x, F_y y F_z. A tal efecto, se utilizó la transformada modificada de Fourier implementada por D. Nesvorný, cuyo código nos fuera provisto oportunamente por el autor.

Las frecuencias fundamentales nos permitieron clasificar las órbitas regulares en tubos de eje mayor (LATs), tubos de eje menor (SATs), y cajas y cajitas (BBLs), usando el método propuesto por Kalapotharakos & Voglis [9], con sucesivos mejoramientos introducidos por Muzzio [11], Aquilano et al. [2] y Muzzio et al. [13].

3 Resultados y análisis

En la Fig. 2 se representa el valor de la energía reducida (energía orbital dividida por su mínimo valor: E/E_{min}) versus el mayor ECL-TF (L_{max}) para cada una de las aproximaciones usadas para el potencial aplicadas al modelo E6.

Cualitativamente, los resultados obtenidos con la expansión A muestran una distribución bimodal (Fig. 2*a*) en contraste con el incremento paulatino de izquierda a derecha que se obtiene con el esquema HO (Fig. 2*b*), sólo interrumpido tenuemente por la presencia de una estructura en las cercanías de $(E/E_{min}) \approx 0.4$. Estas diferencias, por sí solas, ya muestran que las dos aproximaciones del potencial resultan muy diferentes para el modelo E6. El mismo análisis fue realizado para el modelo E6c comprobándose que no surgen discrepancias cualitativas evidentes entre ambas aproximaciones.

En la Tabla 1 se presentan los porcentajes de órbitas regulares, parcialmente caóticas y totalmente caóticas encontrados para cada modelo obtenidos en la presente investigación y se comparan con los valores ya reportados en nuestros trabajos previos, comprobándose la existencia de importantes discrepancias para el modelo E6, hecho que confirma cuantitativamente la impresión obtenida inicialmente al realizar el análisis de la Fig. 2.

La Tabla 2 muestra cómo están caracterizadas las órbitas regulares, clasificándolas en tubos de eje mayor (LATs), tubos de eje menor (SATs), y cajas y cajitas (BBLs). En este caso es posible notar claramente que

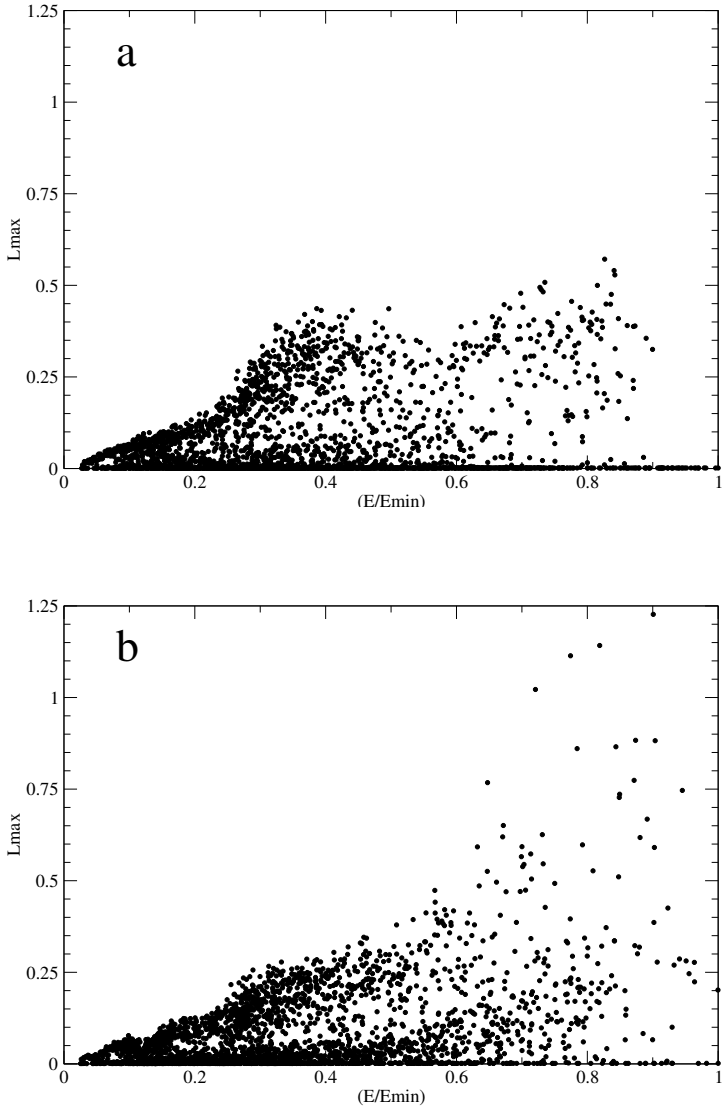

Figura 2: Mayor ECL-TF versus la energía reducida obtenidas para el modelo E6 utilizando las expansiones A (a) y HO (b) para el potencial.

Modelo	R	PC	TC
E6	$17.15 \pm 0.72\%$	$8.81 \pm 0.54\%$	$74.04 \pm 0.84\%$
	$(36.47 \pm 0.92\%)$	$(7.60 \pm 0.51\%)$	$(55.94 \pm 0.95\%)$
E6c	$24.62 \pm 0.68\%$	$6.85 \pm 0.40\%$	$68.53 \pm 0.73\%$
	$(29.06 \pm 0.72\%)$	$(6.53 \pm 0.39\%)$	$(64.42 \pm 0.76\%)$

Tabla 1: Porcentajes de órbitas regulares (R), parcialmente caóticas (PC) y totalmente caóticas (TC) en cada uno de los sistemas triaxiales estudiados. Los valores entre paréntesis corresponden a nuestras investigaciones previas.

los resultados de ambas aproximaciones concuerdan muy bien, aún para el modelo E6.

Modelo	LAT	SAT	BBL
E6	$10.3 \pm 1.6\%$	$34.2 \pm 2.5\%$	$55.5 \pm 2.7\%$
	$(9.4 \pm 1.6\%)$	$(32.8 \pm 2.5\%)$	$(57.8 \pm 2.6\%)$
E6c	$1.7 \pm 0.4\%$	$85.6 \pm 1.2\%$	$12.7 \pm 1.1\%$
	$(1.1 \pm 0.4\%)$	$(85.8 \pm 1.2\%)$	$(13.0 \pm 1.1\%)$

Tabla 2: Porcentajes de LATs, SATs y BBLs correspondientes a las órbitas clasificadas como regulares para ambas expansiones del potencial (los valores entre paréntesis corresponden al modelo A y los restantes a la expansión HO).

4 Conclusiones

Es importante recordar que la aproximación HO usa una expansión radial basada en el modelo propuesto por Hernquist [6]; mientras que la aproximación A no asume ninguna distribución particular de materia, constituyéndose en un abordaje de carácter puramente numérico. Por lo tanto, no resulta sorprendente que la Fig. 1 muestre una pobre concordancia entre ambas expansiones para el modelo E6 (particularmente en las proximidades del centro del sistema), y una muy buena correspondencia para el modelo E6c. La expansión HO no puede aproximar bien la distribución no cuspidal del primero, pero ajusta muy bien la morfología cuspidal del segundo. En otras palabras, si bien

la aproximación HO es idealmente adecuada para el modelo E6c, ésta no puede evitar tratar de reproducir en el modelo E6 una cúspide que realmente no está allí.

Teniendo en cuenta este análisis, ahora es relativamente fácil interpretar la Fig. 2. Puesto que el modelo E6 no es cuspidal, el potencial cerca del centro puede ser aproximado con un oscilador armónico tridimensional y, por lo tanto, no se espera obtener caos allí, que es precisamente lo que muestra la ausencia de valores $L_{max} > L_{lim}$ para $(E/E_{min}) > 0.9$ en la Fig. 2*a*. No obstante, como la aproximación HO introduce artificialmente una cúspide en este modelo, se encuentra caos aún en la región central, además de que los valores son generalmente mayores en la Fig. 2*b*. Los resultados del modelo cuspidal E6c son, en cambio, similares para ambas expansiones, con grandes valores de ECL-TF que disminuyen hacia el centro del sistema. Estas conclusiones son reforzadas por los valores que se muestran en la Tabla 1; mientras que las discrepancias entre los resultados de las dos expansiones alcanzan un nivel de 15σ en el modelo E6, éste decrece a sólo unos 5σ para el E6c.

La clasificación de las órbitas regulares muestra un mejor acuerdo entre los resultados de ambas expansiones. Las diferencias entre los porcentajes obtenidos con los dos esquemas de cálculo, tal como muestra la Tabla 2, se encuentran todas en el nivel de 1σ.

Teniendo en cuenta todo lo expuesto, concluimos -en acuerdo con Carpintero & Wachlin [4]- que pequeñas variaciones en la aproximación del potencial pueden resultar en cambios significativos en los porcentajes de órbitas regulares y caóticas. Esto parece inevitable y se debe a las características propias del movimiento caótico. La clasificación de las órbitas regulares, en cambio, es muy robusta y tanto los resultados obtenidos por Carpintero & Wachlin [4] como los nuestros soportan esta conclusión.

Finalmente, no está demás destacar que es de suma importancia que la ausencia o presencia de cúspides centrales pueda ser adecuadamente tratada por la aproximación usada para el potencial.

Agradecimientos

Agradecemos muy especialmente al Dr. J. C. Muzzio por todas sus sugerencias, aportes e ideas durante el desarrollo y redacción de este artículo; a L. A. Aguilar, L. Hernquist, D. Nesvorný y D. Pfenniger por permitirnos el uso de sus códigos, y a R. E. Martínez y H. R. Viturro por la asistencia técnica brindada oportunamente. Este trabajo se realizó en el marco de proyectos de

investigación del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina, la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica, la Universidad Nacional de La Plata y la Universidad Nacional de Rosario.

Referencias

[1] Aguilar, L.A.; Merritt, D. (1990) "The structure and dynamics of galaxies formed by cold dissipationless collapse", *Astrophysical Journal* **354**: 33–51.

[2] Aquilano, R.O.; Muzzio, J.C.; Navone, H.D.; Zorzi, A.F. (2007) "Orbital structure of self–consistent triaxial stellar systems", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **99** (4): 307–324.

[3] Binney, J; Tremaine, S. (1987) *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[4] Carpintero, D.D.; Wachlin, F.C. (2006) "Sensitivity of the orbital content of a model stellar system to the potential approximation used to describe it", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **96**(2): 129–136.

[5] Crane, P.; Stiavelli, M.; King, I.R. Deharveng, J.M.; Albrecht, R.; Barbieri, C.; Blades, J.C.; Boksenberg, A.; Disney, M.J.; Jakobsen, P.; Kamperman, T.M.; Machetto, F.; Mackay, C.D.; Paresce, F.; Weigelt, G.; Baxter, D.; Greenfield, P.; Jedrzejewski, R.; Nota, A.; Sparks, W.B. (1993) "High resolution imaging of galaxy cores", *The Astronomical Journal* **106** (4): 1371–1393.

[6] Hernquist, L. (1990) "An analytical model for spherical galaxies and bulges", *Astrophysical Journal* **356**: 359–364.

[7] Hernquist, L.; Ostriker, J.P. (1992) "A self–consistent field method for galactic dynamics", *Astrophysical Journal* **386**: 375–397.

[8] Huang, S.; Dubinsky, J.; Carlberg, R.G. (1993) "Orbital deflections in N-body systems", *Astrophysical Journal* **404**: 73–80.

[9] Kalapotharakos, C.; Voglis, N. (2005) "Global dynamics in self–consistent models of elliptical galaxies", *Celestial Mechanics and Dynamical Astrononomy* **92** (1–3): 157–188.

[10] Moller, P.; Stiavelli, M.; Zeilinger, W.W. (1995) "Core properties of elliptical galaxies- I. A northern hemisphere sample at high resolution", *Mon. Not. Royal Astron. Soc.* **276**: 979–1002.

[11] Muzzio, J.C. (2006) "Regular and chaotic orbits in a self-consistent triaxial stellar system with slow figure rotation", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **96**(2): 85–97.

[12] Muzzio, J.C.; Carpintero, D.D.; Wachlin, F.C. (2005) "Spatial structure of regular and chaotic orbits in a self-consistent triaxial stellar system", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **91** (1–2): 173–190.

[13] Muzzio, J.C.; Navone, H.D.; Zorzi, A.F. (2009) "Orbital structure of self-consistent cuspy triaxial stellar systems", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **105**(4): 379–395.

[14] Napolitano, N.R.; Capaccioli, M.; Romanowsky, A.J.; Douglas, N.G.; Merrifield, M.R.; Kuijken, K.; Arnaboldi, M.; Gerhard, O.; Freeman, K.C. (2005) "Mass-to-light ratio gradients in early-type galaxy haloes", *Mon. Not. Royal Astron. Soc.* **357**: 691–706.

[15] Šidlichovský, M.; Nesvorný, D. (1997) "Frequency modified Fourier transform and its application to asteroids", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **65**: 137–148.

[16] Udry, S.; Pfenniger, D. (1988) "Stochasticity in elliptical galaxies", *Astronomy and Astrophysics* **198** (1–2): 135–149.