Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2013 **20**(1) : 79–94
cimpa – ucr issn: 1409-2433

SOBRE UNA CONSTRUCCIÓN DE UN MONOIDE LIBRE CON IDENTIDAD SOBRE UN TOPOS *E* CON EL OBJETO DE LOS NÚMEROS NATURALES

ABOUT THE CONSTRUCTION OF A FREE MONOID WITH IDENTITY ON A TOPOS *E* WITH THE OBJECT OF NATURAL NUMBERS

Osvaldo Acuña Ortega*

Received: 17/May/2012; Revised: 4/Dec/2012; Accepted: 5/Dec/2012

---

*CIMPA & Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica.

Resumen

Damos una construcción del monoide libre con identidad sobre un objeto $X, M(X)$. Donde

$$M(X) = \{R \in \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X}/R \text{ es funcional y } \exists_{n\in\mathbb{N}} \ \ \text{dom } R = [n]\} \xrightarrow{i_X} \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X}.$$

Palabras clave: Teoría de topos, objetos K–finitos, números naturales.

Abstract

We proved that the free monoid with identify in X is

$$M(X) = \{R \in \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X}/R \text{ es funcional y } \exists_{n\in\mathbb{N}} \ \ \text{dom } R = [n]\} \xrightarrow{i_X} \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X}.$$

Keywords: Topoi, K–finite objects, natural numbers.

Mathematics Subject Classification: 03G30, 18B25.

1 Introducción

En [2] probamos que $M(X)$ es un monoide con identidad y que $\models R \in M(X) \Rightarrow \text{ dom } R = [L(R)]$, donde $L : M(X) \longrightarrow (\mathbb{N}, +)$ es un homomorfismo de monoides con identidad.

2 Resultados previos

Para cada $X \in |E|$, E es un topos con el objeto de los numeros naturales, defina $j_X : X \longrightarrow \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X}$ tal que $\models j_X(a) = \{(0, 0, a)\}$.

Lema 1 *j_X se factoriza a través de $M(X)$.*

Demostración. $\models (n, m, b) \in j_X(b) \wedge (n, m, \overline{b}) \in j_X(\overline{b}) \Rightarrow (n, m, b) = (n, m, \overline{b}) \Rightarrow b = \overline{b}$ por lo tanto j_X es funcional y

$$\models \ \text{dom } j_X(a) = \exists_{pr_{12}}(\{(0, 0, a)\}) = \{pr_{12}(0, 0, a)\} = \{(0, 0)\} = [1]$$

entonces $\models$ dom $j_X(a) = [1]$ y $\models j_X(a) \in M(X)$. ∎

Define $\eta_X : X \longrightarrow M(X)$ el único morfismo tal que $\eta_X \circ i_X = j_X$.

Proposición 2 *$M(-)$ se puede extender a un functon de manera única tal que $M(-)$ se transforma en un subfuncton de $\Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times -}$; tiene al functor identidad de E como un subfunctor, via η. Más aún $M(-)$ se factoriza a través de la categoría de los monoides con identidad de E.*

Demostración. Debemos probar que para cualquier flecha $g : X \longrightarrow Y$ de E, existe una única flecha $M(g) : M(X) \longrightarrow M(Y)$ tal que en el siguiente diagrama ambos cuadrados conmutan:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X} \arrow[r, "\exists_{id x g}"'] & \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times Y} \\
M(X) \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "M(g)"'] & M(Y) \arrow[u, "i_Y"'] \\
X \arrow[u, "\eta_X"] \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[u, "\eta_Y"']
\end{tikzcd}$$

Para probar la existencia de $M(g)$ y la conmutatividad del cuadrado superior es suficiente probar internamente que $\exists_{id_{\times g}}$ manda elementos de $M(X)$ en elementos de $M(Y)$.

(i) $\exists_{id_{\times g}}(R)$ un funcional si R es funcional:

$\models (n,m,b) \in \exists_{id_{\times g}}(R) \vee (n,m,\overline{b}) \in \exists_{id_{\times g}}(R)$
$\Rightarrow \exists_{k_1}(n,m,x_1) \in R \wedge g(x_1) = b \wedge \exists_{x_2}(n,m,x_2) \in R \wedge g(x_2) = \overline{b}$
$\Rightarrow \exists_{x_1}\exists_{x_2}(n,m,x_1) \in R \wedge (n,m,x_2) \in R \wedge g(x_1) = b \wedge g(x_2) = \overline{b}$
$\Rightarrow \exists_{x_1}\exists_{x_2} x_1 = x_2 \wedge g(x_1) = b \wedge g(x_2) = \overline{b}$
$\Rightarrow b = \overline{b}.$

(ii) $\models$ dom $\exists_{id_{\times g}}(R) =$ dom (R):

$$\begin{aligned}
\models (n,m) \in \text{ dom } \exists_{id_{\times g}}(R) &\Leftrightarrow \exists_{b\in Y}(n,m,b) \in \exists_{id_{\times g}}(R)\\
&\Leftrightarrow \exists_b\exists_x g(x) = b \wedge (n,m,x) \in R\\
&\Leftrightarrow \exists_x\exists_b g(x) = b \wedge (n,m,x) \in R\\
&\Leftrightarrow \exists_x(n,m,x) \in R\\
&\Leftrightarrow (n,m) \in \text{ dom } R.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\models \text{ dom } \exists_{id_{\times g}}(R) = \text{ dom } R$$

y luego

$$\models \ell(\exists_{id_{\times g}}(R)) = \ell(R).$$

(i) y (ii) dicen que

$$\exists_{id_{\times g}} \circ i_X$$

se factoriza a travez de $M(X)$, por lo tanto existe una flecha única $M(g)$ tal que

$$\exists_{id_{\times g}} \circ i_X = i_Y \circ M(g).$$

Probaremos ahora que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X} \arrow[r, "\exists_{idxg}"'] \arrow[d, "j_X"] & \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times Y} \\
X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[u, "j_Y"']
\end{tikzcd}$$

$$\models \exists_{id_{\times g}}(j_X(a)) = \exists_{id_{\times g}}\{(0,0,a)\} = \{id_{\times g}(0,0,a)\} = \{(0,0,g(a))\}$$

entonces como

$$\models j_Y(g(a)) = \{(0,0,g(a))\}$$

se tiene que

$$\models \exists_{id\times g}(j_X(a)) = j_Y(g(a))$$

y entonces

$$\models \exists_{id\times g} \circ j_X = j_Y \circ g.$$

Por definición de η_X tenemos que

$$\exists_{id\times g} \circ i_X \circ \eta_X = i_Y \circ \eta_Y \circ g,$$

pero

$$\exists_{id\times g} \circ i_X = i_Y \circ M(g)$$

y entonces

$$i_Y \circ M(g) \circ \eta_X = i_Y \circ \eta_Y \circ g$$

lo que implica que

$$M(g) \circ \eta_X = \eta_Y \circ g$$

dado que i_Y es mónica y así se tiene que conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M(X) \arrow[r, "M(g)"'] \arrow[d, "\eta_X"] & M(Y) \\
X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[u, "\eta_Y"']
\end{tikzcd}$$

La unicidad de $M(g)$ es consecuencia de su definición y del hecho de que i_Y es mónico, esto prueba que

$$M(id_X) = id_{M(X)} \text{ y } M(f \circ g) = M(f) \circ M(g).$$

Hemos visto que para todo $X \in |E|$, $M(X)$ es un monoide con identidad. La única cosa que falta por probar es la conmutatividad de los siguientes diagramas:

(i)

$$\begin{tikzcd}
M(X) \times M(X) \arrow[r, "*"'] \arrow[d, "M(g) \times M(g)"] & M(X) \arrow[d, "M(g)"'] \\
M(Y) * M(Y) \arrow[r, "*"] & M(Y)
\end{tikzcd}$$

(ii)

$$\begin{tikzcd}
M(X) \arrow[r, "M(g)"'] & M(Y) \\
1 \arrow[u, "\phi^X"] \arrow[ur, "\phi^Y"'] &
\end{tikzcd}$$

(i) Es suficiente probar que

$$\exists_{id_{X_g}}(R_1 * R_2) = \exists_{id_{X_g}}(R_1) * \exists_{id_{X_g}}(R_2)$$

donde R_1 y R_2 son variables de tipo $M(X)$:

$$
\begin{aligned}
&\models (n,m,b) \in \exists_{id\times g}(R_1 * R_2)\\
&\quad \Leftrightarrow \quad \exists_x g(x) = b \wedge (n,m,x) \in R_1 * R_2\\
&\quad \Leftrightarrow \quad \exists_x g(x) = b \wedge \exists_{k_1}((n,k_1,x) \in R_1 \vee (k_1,m,x) \in R_2)\\
&\qquad\qquad \wedge n+m+1 = \ell(R_1) + \ell(R_2)\\
&\quad \Leftrightarrow \quad \exists_{k_1}(\exists_x g(x) = b \wedge (n,k_1,x) \in R_1 \vee \exists_x g(x) = b \wedge (k_1,m,x) \in R_2)\\
&\qquad\qquad \wedge n+m+1 = \ell(R_1 + \ell(R_2))\\
&\quad \Leftrightarrow \quad \exists_{k_1}((n,k_1,b) \in R_1 \vee (k_1,m,x) \in R_2) \wedge n+m+1 =\\
&\qquad\qquad \ell(R_1) + \ell(R_2)\\
&\quad \Leftrightarrow \quad (n,m,b) \in \exists_{id\times g}(R_1) * \exists_{id\times g}(R_2).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\models \exists_{id\times g}(R_1 * R_2) = \exists_{id_{Xg}}(R_1) * \exists_{id_{Xg}}(R_2)$.

(ii) Es suficiente probar que $\models \exists_{id_{Xg}}(\phi_X) = \phi_Y$; esto es claro ya que $\exists_{id_{Xg}}$ tiene un adjunto derecho $\Omega^{id_{Xg}}$ entonces preserva coproductos. Recuerde que $\phi_X : 1 \longrightarrow \Omega^X$ es el objeto inicial de la categoría interna Ω^X.

Denotemos la categoría de monoides con identidad de E por monoide (E). Hemos visto que $M(-)$ es un functor de E a monoide (E). Debemos probar que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\text{Monoide}(E) \arrow[r, shift left, "i"] & E \arrow[l, shift left, "M"]
\end{tikzcd}
$$

es tal que $M(-)$ es un adjunto izquierdo del functor i (inclusión).

Sea $\widetilde{r} : M(X) \longrightarrow \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X}$ definido por

$$\models \widetilde{r}(R) = \{(n,m,x)/(n,s(m),x) \in R\}$$

donde $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es el morfismo sucesor.

Lema 3 *$\widetilde{r}$ se factoriza por $M(X)$ y $\models \ell(\widetilde{r}(R)) = p(\ell(R))$, donde $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es la función predecesor.*

DEMOSTRACIÓN.

(i) $\widetilde{r}(R)$ es funcional:
$\models (n,m,x) \in \widetilde{r}(R) \wedge (n,m,\overline{x}) \in \widetilde{r}(R) \Rightarrow (n,s(m),x) \in R \wedge (n,s(m),\overline{x}) \in R \Rightarrow x = \overline{x}$.

(ii) $\models$ dom $(\widetilde{r}(R)) = [p \circ \ell(R)]$:

$$\begin{aligned}\models (n,m) \in \text{ dom } (\widetilde{r}(R)) &\Leftrightarrow n + s(m) + 1 = \ell(R)\\ &\Leftrightarrow p(n + s(m) + 1) = p(\ell(R))\\ &\Leftrightarrow n + p(s(m)) + 1 = p(\ell(R))\\ &\Leftrightarrow n + m + 1 = p(\ell(R))\\ &\Leftrightarrow (n,m) \in [p(\ell(R))]. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Defina $r : M(X) \longrightarrow M(X)$ la única flecha tal que $i_X \circ r = \widetilde{r}$. Sea ϑ el subobjeto de $M(X) \times X$ dado por

$$\{(R,x)/(p(\ell(R)),0,x) \in R\} \underset{inc\ell}{\longrightarrow} M(X) \times X$$

donde $inc\ell$ es la inclusión.

Lema 4 **(i)** *ϑ es funcional.*

(ii) *dom $\vartheta = \{R \in M(X)/\ell(R) > 0\}$.*

(iii) $\begin{pmatrix} inc\ell \\ \phi^X \end{pmatrix}$: *dom $\vartheta + 1 \longrightarrow M(X)$ es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN.

(i) Evidente, en particular existe un morfismo único θ : dom $\vartheta \longrightarrow X$ tal que $\models (p(\ell(R)), 0, \theta(R)) \in R$.

(ii)

$$\begin{aligned}\models R \in \text{ dom } \vartheta &\Leftrightarrow \exists_x (R,x) \in \vartheta\\ &\Leftrightarrow \exists_x (p(\ell(R)),0,x) \in R\\ &\Leftrightarrow (p(\ell(R)),0) \in \text{ dom } R\\ &\Leftrightarrow p(\ell(R)) + 0 + 1 = \ell(R)\\ &\Rightarrow p(\ell(R)) + 1 = \ell(R)\\ &\Rightarrow \ell(R) > 0.\end{aligned}$$

$\therefore$ dom $\vartheta \subseteq \{R/\ell(R) > 0\}$
Por otro lado

$$\begin{aligned}\models \ell(R) > 0 &\Rightarrow s(p(\ell(R))) = \ell(R)\\ &\Leftrightarrow p(\ell(R)) + 1 = \ell(R)\\ &\Leftrightarrow R \in \text{ dom } \vartheta.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\text{dom}\,\theta \supseteq \{R/\ell(R) > 0\}$ y entonces $\text{dom}\,\vartheta = \{R/\ell(R) > 0\}$.

(iii) Los cuadrados de los siguientes diagramas son productos fibrados:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi^X"'] \arrow[dr, phantom, "*"] & 1 \arrow[d, "0"] \\
M(X) \arrow[r, "\ell"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\text{dom}\,\theta \arrow[r] \arrow[d, "incl"'] \arrow[dr, phantom, "*"] & \mathbb{N} \arrow[d, "s"] \\
M(X) \arrow[r, "\ell"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

El diagrama de la derecha es un producto fibrado por (ii). El diagrama de la izquierda claramente conmuta, queremos demostrar que es un produto fibrado:

$$\begin{array}{rcll}
\models R \in \ell^{-1}(0) & \Rightarrow & \ell(R) = 0 & \text{(ya que } \ell(R) = \text{ dom } R) \\
& \Rightarrow & \text{dom } R = \phi & \\
& \Rightarrow & \Omega^{pr_{12}}(\text{ dom } R) = \Omega^{pr_{12}}(\phi) = \phi & \\
(\exists_{pr_{12}} \vdash \Omega^{pr_{12}}) & \Rightarrow & R \leq \Omega^{pr_{12}}(\text{ dom } R) = \phi & \\
& \Rightarrow & R = \phi &
\end{array}$$

(donde pr_{12} es la proyección $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times X \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$). Esto prueba que el cuadrado izquierdo es un producto fibrado. Por universalidad del producto fibrado a lo largo de ℓ y como $\mathbb{N} = 1 + s(\mathbb{N})$, se tiene que $\begin{pmatrix} incl \\ \phi^X \end{pmatrix}$ es un isomorfismo. ■

Lema 5 $\models r(R) * i_X(\theta(R)) = R$.

DEMOSTRACIÓN.

$$
\begin{aligned}
&\models (n,m,x) \in r(R) * i_X(\theta(R)) \\
&\quad\Leftrightarrow\quad \exists_{k_1}((n,k_1,x) \in r(R) \vee (k_1,m,x) \in i_X(\theta(R))) \wedge n+m+1 = \ell(R) \\
&\quad\Leftrightarrow\quad \exists_{k_1}((n,s(k_1),x) \in R \wedge s(k_1) = m) \\
&\qquad\quad \vee\exists_{k_1}(k_1 = 0 \wedge m = 0 \wedge x = \theta(R)) \wedge n+m+1 = \ell(R) \\
&\quad\Rightarrow\quad (n,m,x) \in R \vee (m = 0 \wedge (p(\ell(R)),0,x) \in R) \wedge n+m+1 = \ell(R) \\
&\quad\Rightarrow\quad (n,m,x) \in R \vee (m = 0 \wedge n+1 = \ell(R) \wedge (p(\ell(R)),0,x) \in R) \\
&(\text{como } \models n+1 = \ell(R) \Leftrightarrow n = p(\ell(R))) \\
&\quad\Rightarrow\quad (n,m,x) \in R \vee (n,m,x) \in R \\
&\quad\Rightarrow\quad (n,m,x) \in R.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $r(R) * i_X(\theta(R)) \subseteq R$. Por otro lado tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\models (n,m,x) \in R \\
&\quad\Rightarrow\quad ((n,m,x) \in R \wedge m > 0) \vee ((n,0,x) \in R \wedge m = 0) \\
&\quad\Rightarrow\quad \exists_{k_1}((n,m,x) \in R \wedge m = s(k_1)) \vee ((n,0,x) \in R \wedge m = 0) \\
&\quad\Rightarrow\quad \exists_{k_1}((n,s(k_1),x) \in R \wedge s(k_1) = m) \\
&\qquad\quad \vee((p(\ell(R)),0,x) \in R \wedge m = 0 \wedge n = p(\ell(R))) \\
&\quad\Rightarrow\quad \exists_{k_1}((n,s(k_1),x) \in R \wedge s(k_1) = m) \\
&\qquad\quad \vee\exists_{k_1}(k_1 = 0 \wedge m = 0 \wedge x = \theta(R) \wedge n+m+1 = \ell(R)) \\
&\quad\Leftrightarrow\quad (n,m,x) \in r(R) * i_X(\theta(R)).
\end{aligned}
$$

Luego $\models R \subseteq r(R) * i_X(\theta(R))$ y así $\models R = r(R) * i_X(\theta(R))$. ■

Proposición 6 *Si $(B,\cdot,e)$ es un objeto monoide con identidad en un topos E y $f : X \longrightarrow B$ cualquier flecha en E, entonces existe a lo sumo una flecha h que preserva productos e identidad tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & M(X) \arrow[r, "h"] & B \\ X \arrow[ur, "\eta_X"] \arrow[urr, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

Demostración. Suponga que existen flechas $h_1, h_2 : M(X) \to B$ que preservan la estructura de monoide con identidad de $M(X)$ y

$$h_1 \circ \eta_X = h_2 \circ \eta_X.$$

Considere

$$\{n/\forall_{R\in M(X)}(\ell(R) = n \Rightarrow h_1(R) = h_2(R))\} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Denote este subobjeto de $\mathbb{N}$ por S. Queremos probar que $S = \mathbb{N}$. Sabemos que $\models \ell(R) = 0 \Rightarrow R = \phi$; por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} \models \ell(R) = 0 \quad &\Rightarrow \quad R = \phi \\ &\Rightarrow \quad h_1(R) = h_2(R) = e \\ \text{y así } \models \ell(R) = 0 \quad &\Rightarrow \quad h_1(R) = h_2(R) \text{ y así } \models 0 \in S. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos (por lemas 3 y 5)

$$\begin{aligned} &\models n \in S \wedge \ell(R) = s(n) \\ &\quad\Rightarrow \quad R = r(R) * i_X(\theta(R)) \wedge \ell(r(R)) = n \wedge n \in S \\ &\quad\Rightarrow \quad h_1(i_X(\theta(R))) = h_2(i_X(\theta(R))) \wedge R = r(R) * i_X(\theta(R)) \wedge h_1(r(R)) \\ &\qquad\quad = h_2(r(R)) \\ &\quad\Rightarrow \quad h_1(R) = h_2(R). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \models n \in S \wedge \ell(R) = s(n) \quad &\Rightarrow \quad h_1(R) = h_2(R) \\ &\text{si y solo si} \\ \models n \in S \quad &\Rightarrow \quad (\ell(R) = s(n) \Rightarrow h_1(R) = h_2(R)), \end{aligned}$$

y entonces $\models n \in S \Rightarrow s(n) \in S$. Por el principio de inducción $S = \mathbb{N}$ y $h_1 = h_2$. ■

Lema 7 *Si $B \in |E|$, tiene una sección global $\nu : 1 \longrightarrow B$, entonces existe un morfismo natural $J_\nu : M(B) \longrightarrow B^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ con respecto B.*

DEMOSTRACIÓN. Si R es una variable del tipo $M(B)$, J_ν está definida internamente por:

$$\models J_\nu(R) = \{(n,m,b)/(n,m,b) \in R \vee \urcorner(n+m+1 = \ell(R)) \wedge b = \nu)\}.$$

(i) $j_\nu(R)$ es funcional:
(como $[|\urcorner(n+m+1 = \ell(R)) \wedge (n+m+1 = \ell(R))|] = \phi$)
$\models (n,m,b) \in J_\nu \wedge (m,n,b') \in J_\nu(R) \Rightarrow ((n,m,b) \in R \wedge (n,m,b') \in R) \vee (b = \nu \wedge b' = \nu \wedge \urcorner((n+m+1) = \ell(R)) \vee (b' = \nu \wedge \urcorner(n+m+1 = \ell(R)) \wedge (n,m,b) \in R) \vee (b = \nu \wedge \urcorner(n+m+1 = \ell(R)) \wedge (n,m,b') \in R)$

$\Rightarrow b = b' \vee b = b'$
$\Rightarrow b = b'$.

(ii) dom $J_\nu(R) =^{\ulcorner} \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\urcorner}$:
es claro que

$$\models n+m+1 = \ell(R) \Leftrightarrow (n,m) \in \text{ dom } R \Leftrightarrow \exists_{b\in B}(n,m,b) \in R,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\models n+m+1 = \ell(R) \vee \urcorner(n+m+1 = \ell(R)) \\
&\quad \Rightarrow \quad \exists_{b\in B}(n,m,b) \in R \vee \urcorner(n+m+1 = \ell(R)) \\
&(\text{como } \models \exists_{b\in B} b = \nu) \\
&\quad \Rightarrow \quad \exists_{b\in B}(n,m,b) \in R \vee \urcorner(n+m+1 = \ell(R)) \wedge \exists_b(b = \nu) \\
&\quad \Rightarrow \quad \exists_{b\in B}((n,m,b) \in R \vee \urcorner(n+m+1 = \ell(R) \wedge b = \nu)) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \exists_{b\in B}(n,m,b) \in J_\nu(R).
\end{aligned}$$

Luego

$$\models n+m+1 = \ell(R) \vee \urcorner(n+m+1 = \ell(R)) \Rightarrow \exists_{b\in B}(n,m,b) \in J_\nu(R),$$

lo que es equivalente a

$$[|n+m+1 = \ell(R) \vee \urcorner(n+m+1 = \ell(R))|] \subseteq [|\exists_{b\in B}(n,m,b) \in J_\nu(R)|];$$

pero

$$[|n+m+1 = \ell(R) \vee \urcorner(n+m+1 = \ell(R))|] = \text{verdad},$$

y entonces

$$[|\exists_{b\in B}(n,m,b)\in J_\nu(R)|] = \text{verdad}.$$

Así debemos tener que

$$\models \exists_{b\in B}(n,m,b)\in J_\nu(R),$$

por lo tanto

$$\models \forall_{(n,m)}\exists_{b\in B}(n,m,b)\in J_\nu(R),$$

es decir

$$\models\ \text{dom}\ J_\nu(R) = \ulcorner\mathbb{N}\times\mathbb{N}\urcorner$$

y $(i),(ii)$ nos dicen que J_ν se factoriza por

$$B^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}.$$

Probemos que J_ν es natural, esto es si $f : B \longrightarrow B'$ es cualquier flecha entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M(B) \arrow[r, "J_\nu"] \arrow[d, "M(f)"'] & B^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \arrow[d, "f^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}"] \\
M(B') \arrow[r, "J_{f\circ\nu}"'] & B'^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
&\models f^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}(J_\nu(R))\\
&\quad = \quad f^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}(\{(n,m,b)/(n,m,b)\in R\vee\urcorner(n+m+1=\ell(R))\wedge b=\nu\})\\
&\quad = \quad (\{(n,m,f(b))/(n,m,b)\in R\vee\urcorner(n+m+1=\ell(R))\wedge b=\nu\})\\
&\quad = \quad \{(n,m,b')/\exists_b((b'=f(b)\wedge(n,m,b)\in R)\\
&\qquad\qquad \vee\urcorner(n+m+1=\ell(R))\wedge b=\nu\wedge b'=f(b))\}\\
&\quad = \quad \{(n,m,b')/(n,m,b')\in M(f)(R)\vee\urcorner(n+m+1=\ell(R))\wedge b'=f(\nu)\}\\
&\quad = \quad J_{f\circ\nu}(M(f)(R)),
\end{aligned}$$

pero esto es

$$\models f^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}(J_\nu(R)) = J_{f\circ\nu}(M(f)(R)),$$

lo que prueba la naturalidad de J_ν. ■

3 Construcción del monoide

Sea $(B, \cdot, e)$ un monoide con identidad. Nosotros aplicaremos el último lema a la identidad $e : 1 \longrightarrow B$ y entonces podemos definir la siguiente flecha:

$$\mu_B : M(B) \xrightarrow[(J_e, \ell)]{} B^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}*\mathbb{N}} \xrightarrow[(B^k \times \sum_0^{(-)} i)]{} B^{\mathbb{N}*\mathbb{N}} \xrightarrow[\odot]{} B$$

donde $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es el isomorfismo de Cantor y $\odot$ es la flecha iteración-finita definida en (1).

Proposición 8 *Sea $(B, \cdot, e)$ un monoide con identidad $e : 1 \to B$, entonces:*

(i) *El siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & M(B) \arrow[r, "\mu_B"] & B \\ B \arrow[ur, "\eta_B"] \arrow[urr, "id_B"'] & & \end{tikzcd}$$

(ii) *$\mu_B : M(B) \longrightarrow B$ preserva productos.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente tenemos que

(i) $\models J_e(\{(0, 0, b)\}) = \{(n, m, x)/(0, 0, b) = (n, m, x) \vee x = e \wedge (n \in s(\mathbb{N}) \vee m \in s(\mathbb{N}))\}$ entonces

$$\models B^K(J_e(i_B(b))) = \{(n, k)/(n, k) = (0, b) \vee x = e \wedge n \in s(\mathbb{N})\},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}&\models (B^K(J_e(i_B(b))), \ell(i_B(b)))\\ &\quad = \quad (\{(n,x)/(n,x) = (0,b) \vee x = e \wedge n \in s(\mathbb{N})\}, 1).\end{aligned}$$

Como $\models \sum 1 = 1$ y $\models \ell(i_B(b)) = 1$, tenemos que

$$\models \odot(B^K(J_e(i_B(b))), 1) = e \circ b = b$$

por propiedades de $\odot$ y entonces $\models \mu_B(i_B(b)) = b$.

(ii) Por inducción tenemos: sea

$$S = \{n/\forall_{R_1}, \forall_{R_2}(\ell(R_1) = n \Rightarrow \mu_B(R_1 * R_2) = \mu_B(R_1) \cdot \mu_R(R_2))\}.$$

(α) Hemos visto que

$$\models \ell(R_2) = 0 \Rightarrow R_2 = \phi,$$

entonces

$$\models \mu_B(\phi) = \odot(B^K \times \sum((J_e, \ell)(\phi))) = \odot((\{(n,x)/x = e\}, 0)) = e,$$

por lo tanto

$$\models \ell(R_2) = 0 \Rightarrow \mu_B(R_1 * \phi) = \mu_B(R_1) \cdot \mu_B(\phi) = \mu_B(R_1)$$

y así

$$\models \ell(R_2) = 0 \Rightarrow \mu_B(R_1 * R_2) = \mu_B(R_1) \cdot \mu_B(R_2),$$

entonces $\models 0 \in S$.

(β) Para cualquier variable R de tipo $M(B)$ como $\ell(R) > 0$ tenemos por las propiedades básicas de $\odot$ que:

$$\begin{aligned}&\models \odot(B^K(J_e(R * i_B(b))), \sum_0^{\ell(R)} i + \ell(R) + 1)\\ &\quad = \quad \odot(B^K \circ J_e(R * i_B(b)), \sum_0^{\ell(R)} i + \ell(R)) \cdot b\end{aligned}$$

de la construcción de J_e tenemos:

$$\models B^K(J_e(R * i_B(b)))i = B^K \circ J_e(R)(i - \ell(R)).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\odot(B^K(J_e(R*i_B(b)))j, \sum_0^{\ell(R)} i + \ell(R) + 1) \\
&= \odot(B^K(J_e(R)(j-\ell(R))), \sum_0^{\ell(R)} i + \ell(R)) \cdot b \\
&= \odot(B^K(J_e(R))j, \sum_0^{\ell(R)} i) \cdot b,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\models \odot(B^K \circ J_e(R*i_B(b)), \sum_0^{\ell(R)+1} i) = \odot(B^K \circ J_e(R), \sum_0^{\ell(R)} i) \cdot b$$

y entonces

$$\models \mu_B(R*i_B(b)) = \mu_B(R) \cdot b.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
&\models n \in S \wedge \ell(R_2) = s(n) \Rightarrow \mu_B(R_1 * R_2) \\
&= \mu_B(R_1 * (r(R_2) * i_B(\theta(R_2)))) \\
&= \mu_B((R_1 * r(R_2)) * i_B(\theta(R_2))) \\
&= \mu_B(R_1 * r(R_2)) \cdot \theta(R_2) \\
&= (\mu_B(R_1) \cdot \mu_B(r(R_2))) \cdot \theta(R_2) \\
&= \mu_B(R_1) \cdot \mu_B(r(R_2) * i_B(\theta(R_2))) \\
&= \mu_B(R_1) \cdot \mu_B(R_2),
\end{aligned}$$

entonces

$$\models n \in S \wedge \ell(R_2) = s(n) \Rightarrow \mu_B(R_1 * R_2) = \mu_B(R_1) \cdot \mu_B(R_2),$$

o equivalentemente

$$\models n \in S \Rightarrow (\ell(R_2) = s_n \Rightarrow \mu_B(R_1 * R_2) = \mu_B(R_1) \cdot \mu_B(R_2));$$

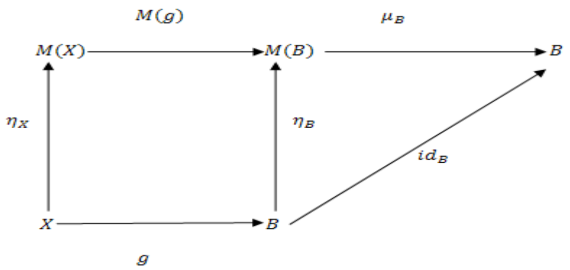
y entonces

$$\models n \in S \Rightarrow s(n) \in S.$$

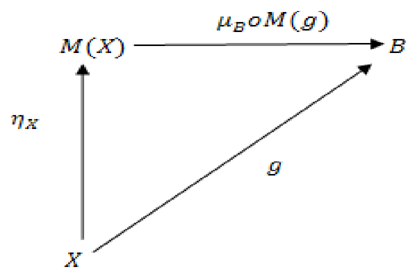
Por indución tenemos que $\mathbb{N} = S$ y la prueba queda lista. ■

Teorema 9 *$(M(X), \eta_X)$ es el monoide libre generado por X.*

Demostración. Sea $g : X \longrightarrow B$ cualquier flecha y $(B, \cdot, e)$ es un monoide con identidad $e : 1 \longrightarrow B$. La proposición 8 nos dice que existe $\mu_B : M(B) \longrightarrow B$ tal que preserva productos y $\mu_B \circ \phi^B = e$, por lo tanto tenemos que el siguiente diagrama conmuta:



$M(g)$ preserva productos e identidades y entonces $\mu_B \circ M(g)$ hace lo mismo por la proposición 6, $\mu_B \circ M(g)$ es único tal que conmuta:



por lo tanto η_X es una flecha universal y la prueba queda completa. ■

Referencias

[1] Acuña–Ortega, O. (1977) *Finiteness in Topoi*, Ph. D. Dissertation, Wesleyan University, Middletown, CT.

[2] Acuña–Ortega, O. (2011) "Una nota sobre objetos $k - finitos$ en un topos Booleano con el objeto de los números naturales", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **19**(2): 239–245.

[3] Acuña–Ortega, O.; Linton, F.E.J. (1979) "Finiteness and decidability I", in: *Applications of Sheaves*, Lecture Notes in Mathematics 753, Springer–Verlag, New York: 80–100.